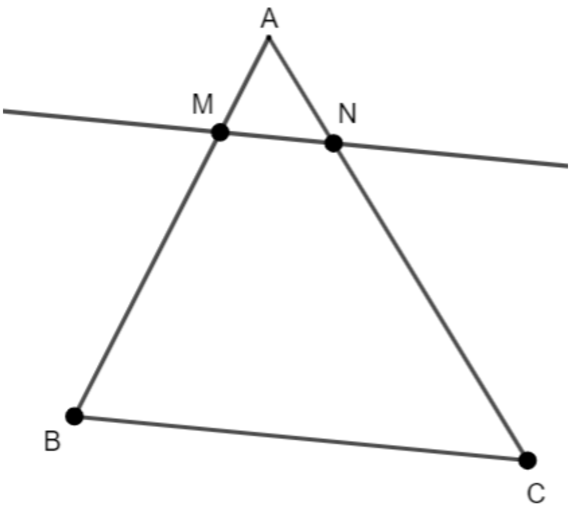
Partie 1



On dispose d'un triangle ABC avec

- M un point de $[AB]$ tel que $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$
- N un point de $[AC]$
- $(MN)//(BC)$

1) a) Placer sur la figure le point I milieu de $[AB]$ et le point J milieu de $[AC]$.

b) Montrer que $(IJ)//(BC)$ et que $IJ = \frac{BC}{2}$.

2) a) Montrer que $(MN)//(IJ)$ et que M est le milieu de $[AI]$.

b) En déduire que N est le milieu de $[AJ]$.

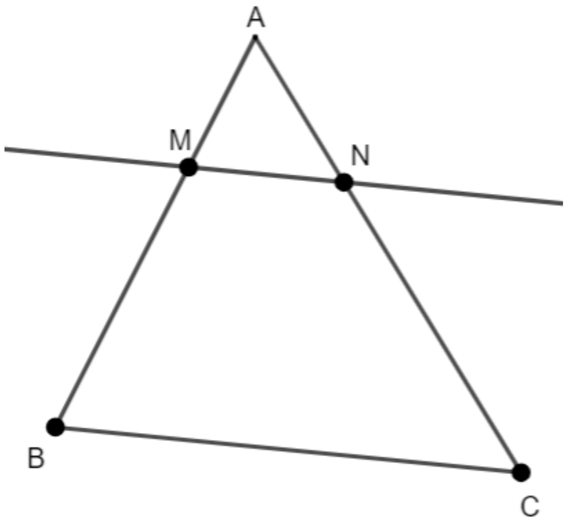
c) En déduire que $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{4}$

3) a) Montrer que $MN = \frac{IJ}{2}$

b) En déduire que $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{4}$

On a ainsi démontré que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Partie 2



On dispose d'un triangle ABC avec

- M un point de $[AB]$ tel que $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$
- N un point de $[AC]$
- $(MN)//(BC)$

1) Placer le point I milieu de $[MB]$ et tracer la parallèle à (BC) passant par I. Elle coupe le segment $[MC]$ en K et le segment $[NC]$ en J.

2) Montrer que K est le milieu de $[MC]$ et $IK = \frac{BC}{2}$

3) Montrer que J est le milieu de $[NC]$ et $KJ = \frac{MN}{2}$

4) a) Montrer que M est le milieu de $[AI]$.

b) Montrer que $(MN)//(IJ)$.

c) En déduire que N est le milieu $[AJ]$ et $MN = \frac{IJ}{2}$

d) En déduire que $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$

5) a) Montrer que $IK + KJ = 2MN$

b) En déduire que $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{3}$

On a ainsi démontré que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Partie 3

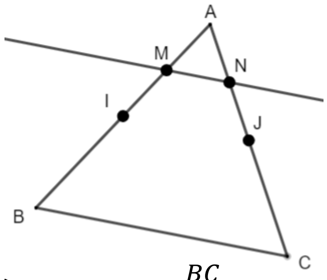
1) En vous inspirant des deux parties précédentes, avec quelles autres valeurs de $\frac{AM}{AB}$ pensez-vous être capable d'obtenir la même conclusion ?

2) Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

3) Comment pourriez-vous renforcer cette conjecture en utilisant Géogebra ?

Partie 1 (Correction)

1) a)



b) Montrer que $(IJ)//(BC)$ et que $IJ = \frac{BC}{2}$.

Dans le triangle ABC, I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$,
D'après le théorème de la droite des milieux,
On a $(IJ)//(BC)$ et $IJ = \frac{BC}{2}$

2) a) Montrer que $(MN)//(IJ)$ et que M est le milieu de $[AI]$.

On a $(MN)//(BC)$ et $(IJ)//(BC)$
Or si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles
Donc $(MN)//(IJ)$.
On a $AB = 4AM$ et $AB = 2AI$
Donc $4AM = 2AI$, d'où $2AM = AI$
Les points A, M et I étant alignés, on en déduit que M est le milieu de $[AI]$.

b) En déduire que N est le milieu de $[AJ]$.

Dans le triangle AIJ, $(MN)//(IJ)$ et M est le milieu de$[AI]$,
D'après la réciproque du théorème de la droite des milieux, N est le milieu de $[AJ]$.

c) En déduire que $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{4}$

$AC = 2AJ$ et $AJ = 2AN$ donc $AC = 4AN$
D'où $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{4}$

3) a) Montrer que $MN = \frac{IJ}{2}$

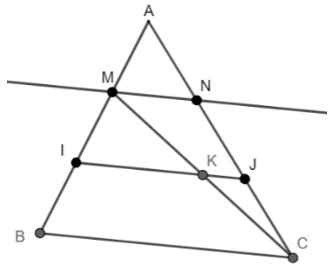
Dans le triangle AIJ, M est le milieu de $[AI]$ et N le milieu de $[AJ]$,
D'après le théorème de la droite des milieux,
On a $MN = \frac{IJ}{2}$

b) En déduire que $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{4}$

D'après les questions 3a) et 1b) : $MN = \frac{IJ}{2}$ et $IJ = \frac{BC}{2}$
Donc $MN = \frac{BC}{4}$ et ainsi $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{4}$.

Partie 2 (Correction)

1) a)



2) Montrer que K est le milieu de $[MC]$ et $IK = \frac{BC}{2}$

Dans le triangle MBC,
$(IK)//(BC)$ et I est le milieu de$[AI]$,
D'après la réciproque du théorème de la droite des milieux, K est le milieu de $[MC]$.
D'après le théorème de la droite des milieux,
On a alors $IK = \frac{BC}{2}$

3) Montrer que J est le milieu de $[NC]$ et $KJ = \frac{MN}{2}$

On procède de la même façon que dans la question précédente avec le triangle MNC.

4) a) Montrer que M est le milieu de $[AI]$.

On a $AB = 3AM$ donc $BI + IM + AM = 3AM$
Or $BI = IM$ donc $2IM + AM = 3AM$
Ainsi $IM = AM$ et les points A, M et I sont alignés, on en déduit que M est le milieu de $[AI]$.

b) Montrer que $(MN)//(IJ)$.

On a $(MN)//(BC)$ et $(IJ)//(BC)$
Or si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles
Donc $(MN)//(IJ)$.

c) En déduire que N est le milieu $[AJ]$ et $MN = \frac{IJ}{2}$

Dans le triangle AIJ, $(MN)//(IJ)$ et M est le milieu de$[AI]$,
D'après la réciproque du théorème de la droite des milieux, N est le milieu de $[AJ]$.
D'après le théorème de la droite des milieux,
On a alors $MN = \frac{IJ}{2}$

d) En déduire que $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$

On a $AN = NJ$ et $NJ = JC$ d'où $AN = NJ = JC$.
On a donc $AC = 3AN$ et ainsi $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$

5) a) Montrer que $IK + KJ = 2MN$

$IJ = IK + KJ$ et $IJ = 2MN$ donc $IK + KJ = 2MN$

b) En déduire que $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{3}$

On a donc $\frac{BC}{2} + \frac{MN}{2} = 2\,MN$ d'où $0{,}5BC = 1{,}5MN$
Ainsi $\frac{MN}{BC} = \frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3}$