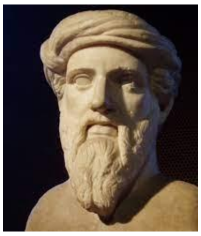
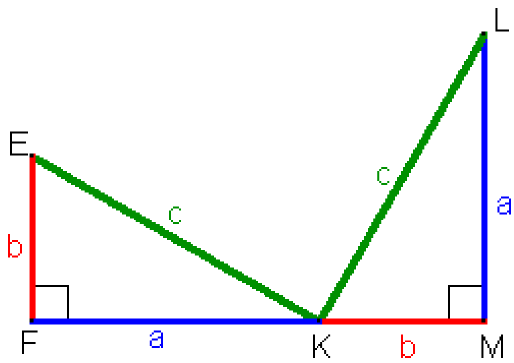
Il existe environ plus de 370 démonstrations du théorème de Pythagore. Cette activité propose de retrouver l'une d'elles proposée par J.A Garsfield qui fut le vingtième président des Etats-Unis d'Amérique.



Soient un triangle EFK rectangle en F et un triangle KML rectangle en F identique à EFK que l'on dispose comme indiqué sur la figure avec les points F, K et M alignés.



1) Marquer les angles égaux sur la figure.
2) Quelle est la mesure de $\widehat{FKE} + \widehat{LKM}$.
3) Quelle est la mesure de $\widehat{FKM}$?
4) En déduire la mesure de $\widehat{EKL}$.
5) Quelle est l'aire du triangle EKL ?
6) Prouvez que $EFML$ est un trapèze.
7) Calculer l'aire de $EFML$ en ajoutant les aires des trois triangles EFK, EKL et KML.
8) Calculer l'aire de $EFML$ en utilisant la formule pour le calcul de l'aire d'un trapèze :

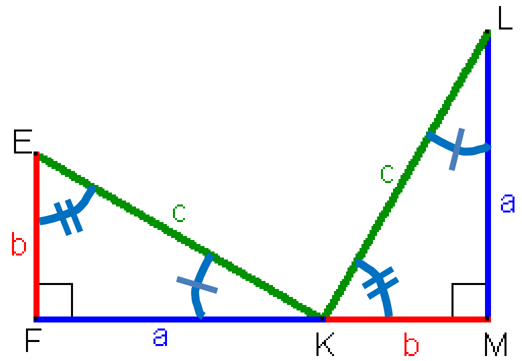
$$Aire\ d'un\ trapèze = \frac{petite\ base + grande\ base}{2} \times hauteur$$

9) En déduire alors la relation suivante :

$$\frac{(a+b)^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2}$$

10) Simplifiez cette égalité pour conclure

Correction



1) Marquer les angles égaux sur la figure.
2) Quelle est la mesure de $\widehat{FKE} + \widehat{LKM}$.

La somme des angles dans un triangle est de 180 degrés.

Donc dans le triangle EFK, on a : donc

$\widehat{FKE} + \widehat{KEF} + \widehat{EFK} = 180^\circ$

$\widehat{FKE} + \widehat{KEF} + 90 = 180^\circ$ $car\ \widehat{EFK} = 90^\circ$

$\widehat{FKE} + \widehat{KEF} = 90^\circ$

Or $\widehat{KEF} = \widehat{LKM}$

Donc $\boxed{\widehat{FKE} + \widehat{LKM} = 90^\circ}$

3) Quelle est la mesure de $\widehat{FKM}$? $\widehat{FKM}$ est un angle plat donc $\boxed{\widehat{FKM} = 180^\circ}$
4) En déduire la mesure de $\widehat{EKL}$.

$\widehat{FKM} = \widehat{FKE} + \widehat{EKL} + \widehat{LKM}$

En utilisant les résultats des questions 2) et 3)

$180 = \widehat{EKL} + 90$

$\boxed{\widehat{EKL} = 90^\circ}$

5) Quelle est l'aire du triangle EKL ?

EKL est donc un triangle rectangle isocèle qui a pour aire

$$Aire_{EKL} = \frac{EK \times KL}{2} = \frac{c \times c}{2} = \boxed{\frac{c^2}{2}}$$

6) Prouvez que $EFML$ est un trapèze.

On sait que $(EF) \perp (FM)$ et que $(LM) \perp (FM)$.

Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles.

Donc (LM) // (EF) et $EFML$ est ainsi un trapèze.

7) Calculer l'aire de $EFML$ en ajoutant les aires des trois triangles EFK, EKL et KML.

$$Aire_{EFML} = Aire_{EFK} + Aire_{KLM} + Aire_{EKL} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = \boxed{ab + \frac{c^2}{2}}$$

8) Calculer l'aire de $EFML$ en utilisant la formule pour le calcul de l'aire d'un trapèze :

$$Aire_{EFML} = \frac{LM + EF}{2} \times FM = \frac{a+b}{2} \times (a+b) = \boxed{\frac{(a+b)^2}{2}}$$

9) En déduire alors la relation suivante $\frac{(a+b)^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2}$

On utilise les résultats des deux questions précédentes.

10) Simplifiez cette égalité pour conclure

$$\frac{(a+b)^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2}$$
$$(a+b)^2 = 2ab + c^2$$
$$(a+b)(a+b) = 2ab + c^2$$
$$a^2 + ab + ab + b^2 = 2ab + c^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Et on a démontrer ainsi le théorème de Pythagore !