Les nombres négatifs ont très longtemps posé de grosses difficultés aux mathématiciens et penseurs.

« Pour obtenir réellement une quantité négative […], il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative […]? »
Lazare Carnot (1753-1823), mathématicien français

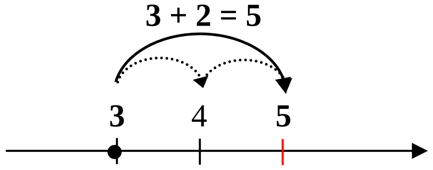
En Europe, les nombres négatifs font leur apparition au XV^{ème} siècle et ne seront vraiment acceptés qu'à la fin du XIXème siècle.

Dès que ces nombres négatifs ont commencé à être tolérés, on a cherché à les additionner, les soustraire, les multiplier et les diviser entre eux. Les règles de calcul ont été construites progressivement en prolongement des règles sur les positifs. On ne cherchait pas à les rattacher au réel mais à les définir de façon logique.

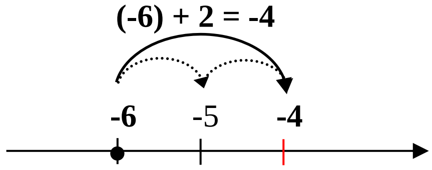
Exercice 1 : on ajoute un nombre positif à un autre nombre

On ajoute 2 à un nombre positif.	Par prolongement, on ajoute de la même façon 2 à un nombre négatif.

3 + 2 = 5



(-6) + 2 = -4



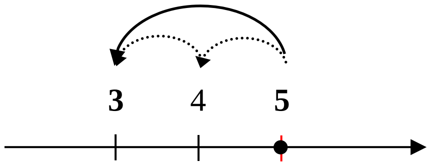
Effectuez maintenant les calculs suivants en utilisant la même méthode (soit en imaginant l'exemple ci-dessus dans sa tête, soit en traçant une droite graduée sur son brouillon)

(- 3) + 7 = ___	**(- 8) + 2 = ___**	**(- 5) + 5 = ___**	**(- 1) + 4 = ___**
-3 + 9 = ___	**(- 9) + 4 =___**	**-3 + 2 = ___**	**(- 7) + 7 = ___**
-5 + 7 = ___	**-3 + 3 = ___**	**-3 + 1 = ___**	**-10 + 1 = ___**

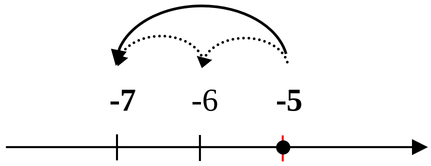
Exercice 2 : on soustrait un nombre positif à un autre nombre

On enlève 2 à un nombre positif.	Par prolongement, on enlève de la même façon 2 à un nombre négatif.

5 – 2 = 3



(-5) – 2 = -7



Effectuez maintenant les calculs suivants en utilisant la même méthode:

(- 3) – 7 = ___	**(- 8) – 2 = ___**	**(- 5) – 5 = ___**	**(+ 2) – 4 = ___**
3 – 9 = ___	**(+ 9) – 4 =___**	**-3 – 2 = ___**	**(- 7) – 7 = ___**
4 – 7 = ___	**-3 – 3 = ___**	**-3 – 1 = ___**	**-10 – 1 = ___**

Exercice 3 : Addition et soustraction de deux nombres relatifs

a) Dans les deux tableaux, complétez d'abord le cadre grisé à droite (soustraction ou addition d'un nombre positif comme vu à l'exercice 1)

+	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3							
-2							
-1							
0							
1							
2							
3						5	

–	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3							
-2							
-1							
0				0			
1					0		
2						0	
3					2		0

b) Complétez ensuite le cadre à gauche par prolongement sans faire de calcul.

Les exercices 1, 2 et 3 permettent de comprendre comment par prolongement on peut faire des additions et des soustractions avec les nombres relatifs. Pour plus de facilité, on a cherché ensuite à énoncer des règles pour ne pas avoir besoin de passer par des tableaux pour effectuer ces calculs. Ce sont les règles que l'on vous a données en cinquième.

Exercice 4 : Expression écrite

Rédiger sur votre cahier les règles d'addition et de soustraction de deux nombres relatifs.

L'essentiel à retenir pour le moment est …

- …qu'il est tout à fait normal que les nombres relatifs vous posent des difficultés puis qu'ils en ont posées aux mathématiciens jusqu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle.
  C'est avec de l'entraînement que ces opérations vous deviendront plus familières.

- …qu'il faut essayer d'accepter que -2 – (- 3) = 1. Il y a des signes moins partout et on obtient un résultat positif !!! Rappelez-vous que les règles de calculs sont construites par prolongement de celles sur les nombres positifs.
  Chercher un exemple dans la vie de tous les jours comprendre un résultat n'est donc pas une bonne solution.

Pour établir les règles de la multiplication Mac Laurin propose en 1748 une méthode qui part des connaissances que l'on a sur les nombres positifs. Mac Laurin ne cherche pas du tout à donner un sens concret à ces règles ; il veut juste que la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication fonctionne encore avec les nombres relatifs.

1) Commençons par réviser le principe de la distributivité vue en cinquième :

$$\mathbf{a \times (b + c) = a \times b + a \times c} \qquad \mathbf{a \times (b - c) = a \times b - a \times c}$$

a) $2(5 - x) = 2 \times$ ___ $-$ $2 \times$ ___ $=$ ___ $-$ ___

b) $7(5 - 3x) =$ ________

c) ___ $(y + 5) = 4y +$ ___

d) $6($ ___ $+$ ___ $) = 6x + 12y$

e) $x(2 + 3y) =$ ________

f) ___ $($ ___ $+$ ___ $) = 2x + 4$

g) $5(3x - 5y) =$ ________

h) $n($ ___ $+ p) =$ ___ $+ nt$

2) Calculons 5 × (-6) en acceptant que la distributivité fonctionne avec les nombres relatifs :

$6 + (-6) =$ ____

Calculons maintenant de deux façons $5 [6 + (-6)]$:

$5 [6 + (-6)] = 5 \times$ ___ $=$ ___

$5 [6 + (-6)] =$ ___ $\times$ ___ $+$ ___ $\times$ ___

Les deux résultats précédents sont égaux donc : ___ $\times$ ___ $+$ ___ $\times$ ___ $=$ ___

5×6 et $5 \times (-6)$ sont donc ___________ puisque leur somme est nulle.

5×6 est ________ puisque l'on multiplie deux nombres positifs.

Donc en déduit que $5 \times (-6)$ est ________ et vaut ________

3) Généralisons le résultat précédent :

Dans tout le reste de l'activité a et n désignent des distances à zéros (donc a et n sont positifs)

On a donc : $a + (-a) =$ ____

Calculons maintenant de deux façons $n [a + (-a)]$:

$n [a + (-a)] = n \times$ ___ $=$ ___

$n [a + (-a)] =$ ___ $\times$ ___ $+$ ___ $\times$ ___

En comparons les deux résultats ont obtient donc : ___ $\times$ ___ $+$ ___ $\times$ ___ $=$ ___

$n \times a$ et $n \times (-a)$ sont donc ___________ puisque leur somme est nulle.

$n \times a$ est ________ puisque l'on multiplie deux nombres positifs.

Donc en déduit que $n \times (-a)$ est ________

Comme n est ________ et $(-a)$ est ________, on peut donc conclure que :

Le produit d'un nombre positif par un nombre négatif est un nombre ________

4) Calculons (-7) × (-4) en acceptant que la distributivité fonctionne avec les nombres relatifs :

5) Généralisons le résultat précédent :

On se souvient que $a + (-a) = 0$

Calculons maintenant de deux façons $(-n)\ [\ a + (-a)\ ]$:

$(-n)\ [\ a + (-a)\ ]$ = ___ × ___ = ___

$(-n)\ [\ a + (-a)\ ]$ = ___ × ___ + ___ × ___

On a donc ___ × ___ + ___ × ___ = ___

$(-n) \times a$ et $(-n) \times (-a)$ sont donc ________ puisque leur somme est nulle.

$(-n) \times a$ est ________ puisque l'on multiplie un nombre positif par un nombre négatif.

Donc en déduit que $(-n) \times (-a)$ est ________

Comme $(-n)$ est ________ et $(-a)$ est ________, on peut donc conclure que :

Le produit de deux nombres négatifs est un nombre ________

En résumé, on peut donc dire que :
- **le produit de deux nombres relatifs de même signe est positif.**
- **le produit de deux nombres relatifs de signe différent est négatif.**

Comme on vient de le voir, il est donc possible d'étendre les règles de la multiplication avec les nombres positifs aux nombres négatifs. C'est pratique mais cela ne nous donne pas vraiment un sens concret aux résultats que donne la multiplication de deux nombres négatifs par exemple.

Mais est-ce si important que ça ?

C'est le mathématicien Hankel qui va contribuer à apporter la réponse vers la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Il va en fait considérer les nombres comme des êtres mathématiques indépendants (qui ont certaines relations entre eux) mais qui n'ont pas forcement à être reliés à une réalité physique pour exister. Hankel accepte donc sans aucun problème que $(-3)^2 > (2)^2$ car ce résultat est cohérent et peu importe que cela choque les idées reçues…

Et voila la petite histoire des nombres relatifs, commencée à la fin du XV$^{\text{ème}}$ siècle et qui s'achève 400 ans plus tard ! J'espère qu'il ne vous faudra pas autant de temps pour maîtriser cette leçon ☺ ☺ ☺

Source pour l'aspect historique ce document : http://nti.educa.rcanaria.es/penelope/confnomneg.htm

1) Calculer les produits et en déduire les quotients qui en découlent :

- $2 \times 9 = \dots$ donc $\dfrac{\dots\dots}{2} = \dots\dots\dots$ et $\dfrac{\dots\dots\dots}{9} = \dots\dots$
- $4 \times (-7) = \dots\dots$ donc $\dfrac{\dots\dots}{4} = \dots\dots\dots$ et $\dfrac{\dots\dots\dots}{-7} = \dots\dots$
- $(-3) \times 8 = \dots\dots$ donc $\dfrac{\dots\dots\dots}{-3} = \dots\dots\dots$ et $\dfrac{\dots\dots\dots}{8} = \dots\dots\dots$
- $(-5) \times (-6) = \dots\dots$ donc $\dfrac{\dots\dots\dots}{-5} = \dots\dots\dots$ et $\dfrac{\dots\dots\dots}{-6} = \dots\dots\dots$

2) En utilisant ce qui précède, essayer de deviner les règles pour le signe du quotient de deux nombres :

Le quotient de deux nombres de même signe est ________.

Le quotient de deux nombres de signes contraires est ________.

3) Essayer de prouver ces règles sans utiliser d'exemples.

4) Calculer : $A = \dfrac{56}{-8}$; $B = -\dfrac{121}{11}$; $C = \dfrac{-9}{-18}$; $D = (-6) : (-12)$