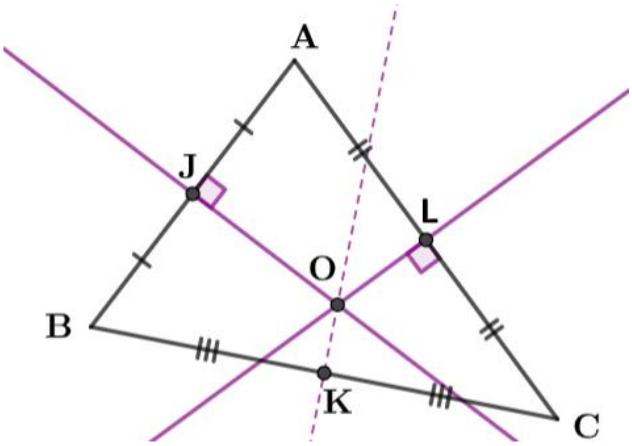
Partie A : intersections des médiatrices ; centre du cercle circonscrit

On donne la figure ci-dessous où (JO) et (LO) sont deux médiatrices du triangle ABC.

J, K et L sont respectivement les milieux des cotés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.



1) a) Montrer que $OA = OB$.

   b) Montrer que $OA = OC$.

   c) En déduire que $OB = OC$.

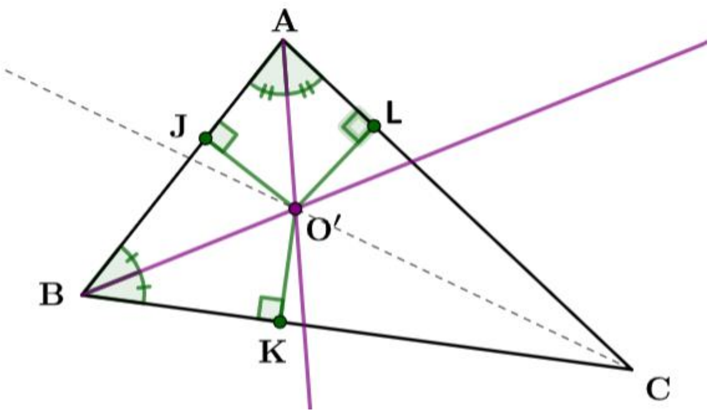
2) Montrer que (KO) est la médiatrice du coté $[BC]$.

3) Montrer que le cercle de centre O de rayon OA est le cercle circonscrit du triangle ABC.

Partie B : intersections des bissectrices ; centre du cercle inscrit

On donne la figure ci-dessous où $[AO')$ et $[BO')$ sont deux bissectrices du triangle ABC.

J, K et L sont respectivement les projetés orthogonaux de O' sur les cotés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.



1) a) Montrer que $O'J = O'K$.

   b) Montrer que $O'J = O'L$.

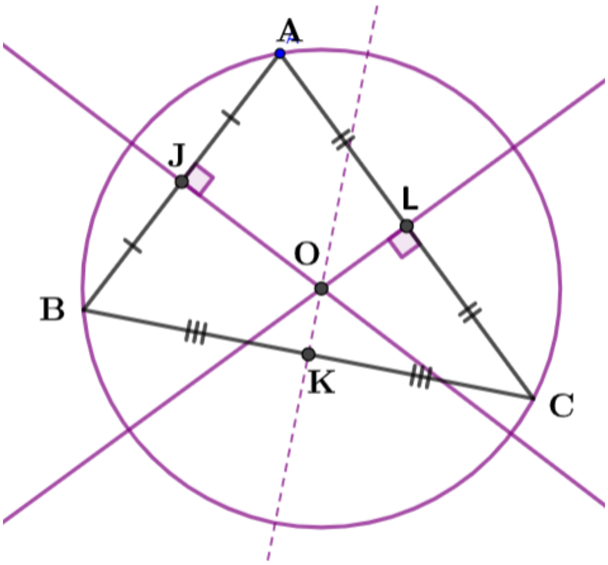
   c) En déduire que $O'K = O'L$.

2) Montrer que $[CO')$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$.

3) Montrer que le cercle de centre O' de rayon $O'J$ est le cercle inscrit du triangle ABC.

Correction

Partie A : intersections des médiatrices ; centre du cercle circonscrit



1) a) Montrer que $OA = OB$.

(OJ) est la médiatrice de $[AB]$,

Or l'ensemble des points d'une médiatrice d'un segment sont équidistant de ses extrémités,

Donc $\boxed{OA = OB}$.

b) Montrer que $OA = OC$.

(OL) est la médiatrice de $[AC]$,

Or l'ensemble des points d'une médiatrice d'un segment sont équidistant de ses extrémités,

Donc $\boxed{OA = OC}$.

c) En déduire que $OB = OC$.

D'après les deux questions précédentes $OA = OB$ et $OA = OC$ donc $\boxed{OB = OC}$.

2) Montrer que (KO) est la médiatrice du coté $[BC]$.

O est donc équidistant des extrémités du segment $[BC]$, et K est le milieu de $[BC]$,

Or la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants de ses extrémités,

Donc O et K appartiennent à la médiatrice de $[BC]$.

(KO) est bien la médiatrice du coté $[BC]$.

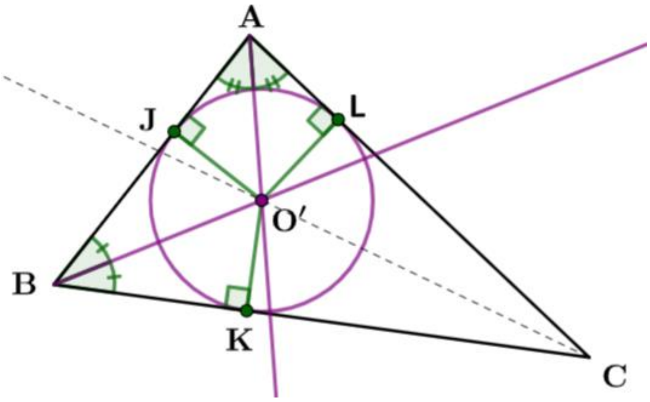
3) Montrer que le cercle de centre O de rayon OA est le cercle circonscrit du triangle ABC.

On a démontré que $OA = OB = OC$.

Donc les sommets du triangle sont à égale distance du point O et appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre O dont $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ sont des rayons.

$\mathcal{C}$ est donc bien le cercle circonscrit du triangle ABC,

Partie B : intersections des bissectrices ; centre du cercle inscrit



1) a) Montrer que $O'J = O'K$.

$[BO')$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$,

Or tous les points d'une bissectrice d'un angle sont équidistants des cotés formant cet angle,

Donc $\boxed{O'J = O'K}$.

b) Montrer que $O'J = O'L$.

$[AO')$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$

Or tous les points d'une bissectrice d'un angle sont équidistants des cotés formant cet angle,

Donc $\boxed{O'J = O'L}$.

c) En déduire que $O'K = O'L$.

D'après les deux questions précédentes $O'J = O'K$ et $O'J = O'L$ donc $\boxed{O'K = O'L}$.

2) Montrer que $[CO')$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$.

O' est donc équidistant des segment $[CB]$ et $[CA]$,

Or la bissectrice d'un angle est l'ensemble des points équidistants des deux segments formant l'angle,

Donc O' appartient à la bissectrice de l'angle de $\widehat{BCA}$.

(CO') est bien la bissectrice de l'angle de $\widehat{BCA}$.

3) Montrer que le cercle de centre O' de rayon $O'J$ est le cercle inscrit du triangle ABC.

On a démontré que $O'J = O'K = O'L$.

Donc les points J, K et L sont à égale distance du point O'.

Ils appartiennent ainsi au cercle $\mathcal{C}'$ de centre O' dont $[O'K]$, $[O'J]$ et $[O'L]$ sont des rayons.

D'autre part $(CB) \perp [O'K]$, $(AB) \perp [O'J]$ et $(AC) \perp [O'L]$,

Or si une droite est perpendiculaire à un rayon d'un cercle, elle est tangente à ce cercle.

Donc tous les côtés du triangle sont tangents au cercle $\mathcal{C}'$ qui est donc inscrit dans celui-ci.