THEOREME DE THALES

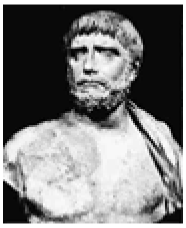
Emilien Suquet, suquet@automaths.com

I Le théorème de Thalès ?

Thalès est un mathématicien grec qui aurait vécu au VI^{ème} siècle avant Jésus Christ. Nous ne le connaissons qu'à travers les écrits de Sophocle, de Pappus et d'autres. On peut en fait seulement lui attribuer les quatre résultats mathématiques suivants :

Deux angles opposés par le sommet sont de même mesure.

Le diamètre d'un cercle coupe ce même cercle en deux parties de même aire.



Les angles à la base d'un triangle isocèle sont de la même mesure.

Si un triangle est inscrit dans un cercle tel que l'un de ses côtés soit le diamètre de ce cercle alors ce triangle est rectangle.

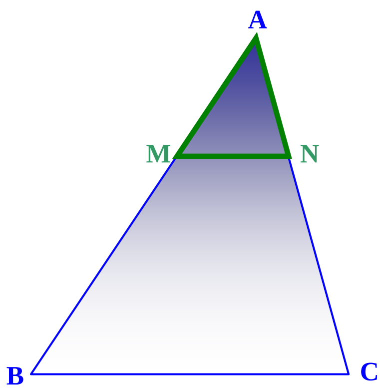
A la fin du 19ème siècle, une épreuve d'histoire des mathématiques avait été introduite dans les épreuves de recrutement des professeurs de mathématiques. Il était donc de bon goût à cette époque d'associer à chaque théorème son auteur. Le théorème ci-dessous a été trop rapidement attribué à Thalès mais néanmoins on a conservé par habitude cette dénomination. Il serait plus sage de nommer le théorème suivant « théorème en hommage à Thalès » :

Configuration : ABC un triangle avec M un point de (AB) et N un point de (AC).

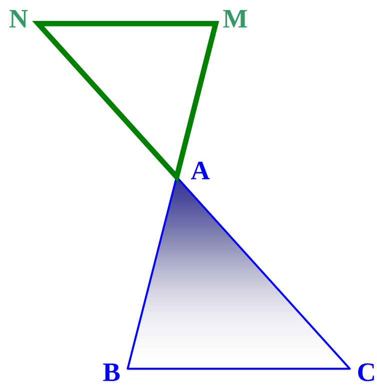
Si (BC) et (MN) sont parallèles alors $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{MN}{BC}$ ***(et A,M et B alignés dans le même ordre que A,N et C)***

Remarques :

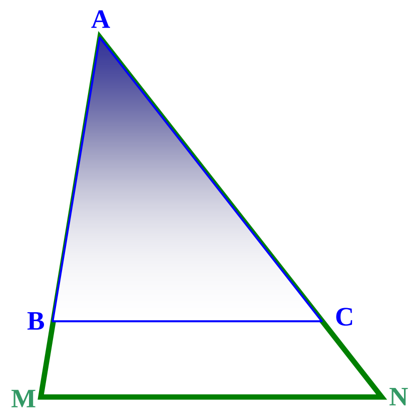
- On peut donc utiliser le théorème de Thalès dans les trois configurations suivantes :



configuration 4ème



configuration dite « papillon »

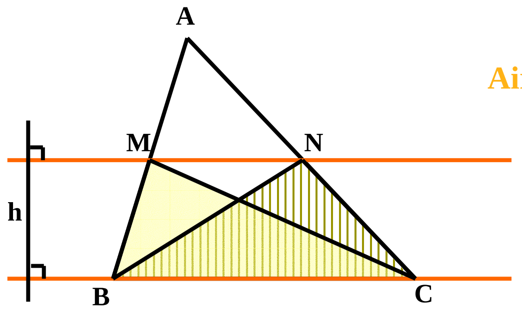


- Dans le cas où M est le milieu de [AB] et N est le milieu de [AC] on se retrouve dans la configuration de la réciproque du théorème de la droite des milieux.

II Démonstration du théorème par Euler

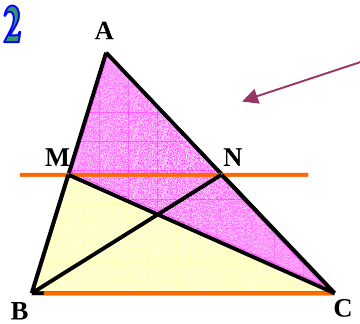
Le théorème de Thalès devrait plutôt être attribué à Euclide, qui au III$^{\text{ème}}$ siècle avant JC, en donna la première démonstration. Voici, en écriture moderne, un extrait de cette démonstration. Cette démonstration n'est pas à apprendre mais faire l'effort de la comprendre oblige à un travail sur les aires intéressant.

1



$$\text{Aire(MBC)} = \text{Aire(NBC)} = \frac{BC \times h}{2}$$

2

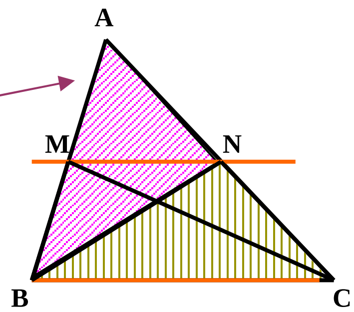


Aire(AMC) = Aire(ABC) – Aire(MBC)

Aire(ABN) = Aire(ABC) – Aire(NBC)

D'après 1) on a : Aire(MBC) = Aire(NBC)

Donc Aire(AMC) = Aire(ABN)

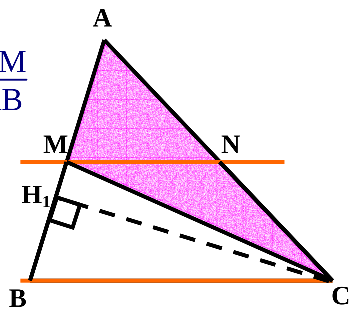


3

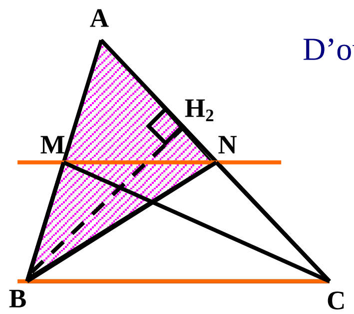
$$\text{Aire (AMC)} = \frac{AM \times CH_1}{2}$$

$$\text{Aire (ABC)} = \frac{AB \times CH_1}{2}$$

$$\text{D'où } \frac{\text{Aire (AMC)}}{\text{Aire (ABC)}} = \frac{AM}{AB}$$



3



$$\text{Aire (ANB)} = \frac{AN \times BH_2}{2}$$

$$\text{Aire (ABC)} = \frac{AC \times BH_2}{2}$$

$$\text{D'où } \frac{\text{Aire (ANB)}}{\text{Aire (ABC)}} = \frac{AN}{AC}$$

Or Aire(AMC) = Aire(ANB) d'après 2)

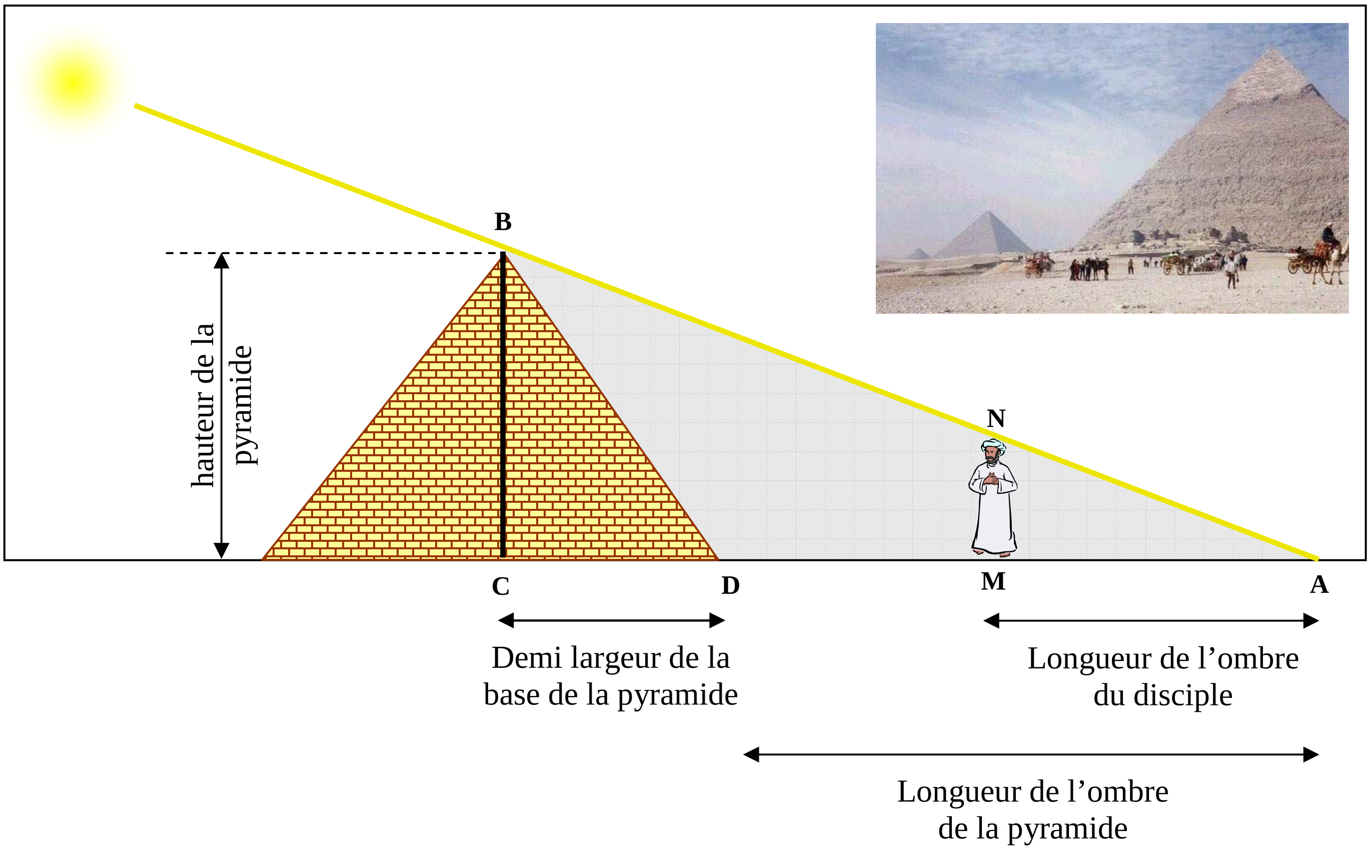
$$\text{Donc } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Remarque :

Euler n'a pas démontré l'autre partie de l'égalité $\frac{AM}{AN} = \frac{MN}{BC}$ et n'a pas évoqué la configuration papillon que nous avons démontré en activité.

III Un exemple d'utilisation du théorème de Thalès

Une légende raconte que Thalès se serait servi du théorème précédent pour mesurer la hauteur d'une pyramide. Voici comment il aurait procédé :



A un moment ensoleillé de la journée, Thalès place un de ses disciples de telle sorte que son ombre coïncide avec celle de la pyramide comme sur le schéma. Il prend alors les mesures suivantes :

CD = 115 *m* ; DM = 163,4 *m* ; AM = 3,5 *m* ; MN = 1,8 *m* (taille du disciple)

Il effectue alors le raisonnement suivant (rédigé en langage moderne) :

Dans le triangle ABC on a : $\begin{cases} - N \in [AB] \\ - M \in [AC] \\ - (MN) \,//\, (BC) \end{cases}$

On peut considérer que le disciple se tient bien droit et que donc (MN) // (BC)

D'après le théorème de Thalès, on a donc

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

D'où $\dfrac{3,5}{AC} = \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{1,8}{BC}$

Or AC = AM + MD + CD = 3,5 + 163,4 + 115 = 281,9 m

$$\frac{3,5}{281,9} = \frac{1,8}{BC}$$

$3,5 \times BC = 1,8 \times 281,9$

3,5 BC = 507,42

BC = 145,0 à 0,1 près

<u>La pyramide a donc une hauteur de 145 m à 10 cm près</u>

IV La réciproque du théorème de Thalès

Toujours dans les Eléments d'Euclide (Livre 6, proposition 2), on trouve une démonstration de la réciproque du théorème de Thalès :

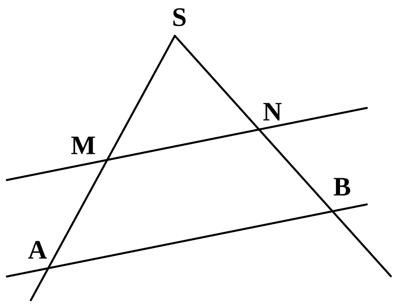
ABC un triangle avec M un point de (AB), N un point de (AC).
Si A,M,B alignés dans le même ordre que A,N et C et $\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN}$ alors (BC) et (MN) sont parallèles.

Démonstration : admise

Euclide ne précise pas dans son livre que les points doivent être alignés dans le même ordre, ce qui rend l'énoncé et sa démonstration erronée.

Remarque :
On note que la réciproque du théorème de Thalès correspond dans le cas où $\frac{SN}{SB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2}$ au théorème de la droite des milieux.

Exercice type :
On a SM = 2 ; SA = 6 ; SN = 3 ; SN = 9
Démontrez que (AB) et (MN) sont parallèles.



Correction :

Comparons $\frac{SM}{SA}$ et $\frac{SN}{SB}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{SM}{SA} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \frac{SN}{SB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \text{On constate que } \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}$$

Dans le triangle ABS on a : $\left\{\begin{array}{l} \text{- S,M,A alignés dans le même ordre que S,N,B} \\ - \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} \end{array}\right.$

D'après la réciproque du théorème de Thalès,
Donc (MN) est parallèle à (AB)

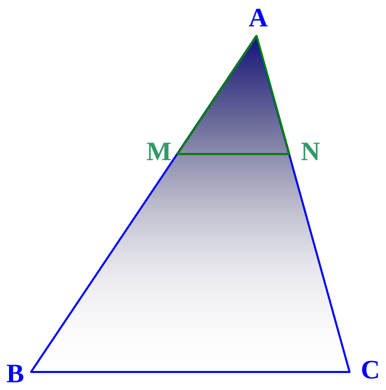
Il faut faire extrêmement attention lorsque l'on compare les rapports à ne pas faire d'approximations. En effet, si on a $\frac{SM}{SA} \approx 1,33$ à 0,01 près et $\frac{SN}{SB} \approx 1,33$ à 0,01 près on ne peut pas du tout savoir si les deux rapports sont égaux.

V Théorème de Thalès et proportionnalité

Dans son livre "Les Eléments", Euclide énonce le théorème de Thalès et sa réciproque ainsi :

« Si une certaine droite est menée parallèle à l'un des côtés d'un triangle, elle coupera les côtés du triangle en proportion.»

Il a une approche du théorème de Thalès par la proportionnalité. Essayons de comprendre :



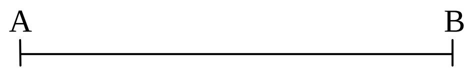
Ce qu'écrit Euclide est que si (MN) est parallèle à (BC) alors les longueurs des cotés des triangles AMN et ABC sont proportionnelles entre elles. C'est à dire que le tableau ci-dessous est proportionnel :

Coté du triangle AMN	AM	AN	MN
Coté du triangle ABC	AB	AC	BC

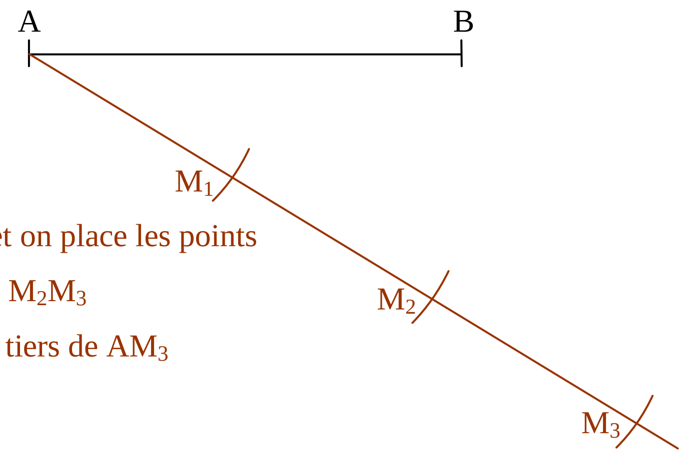
Par exemple, si AM représente le tiers de AB alors AN représentera le tiers de AC et de même pour MN par rapport à BC

De cette notion de proportionnalité, on trouve une application mathématique dans le découpage d'un segment en trois parties de même longuer au compas et à l'équerre non graduée.

Situation initiale



Etape 1



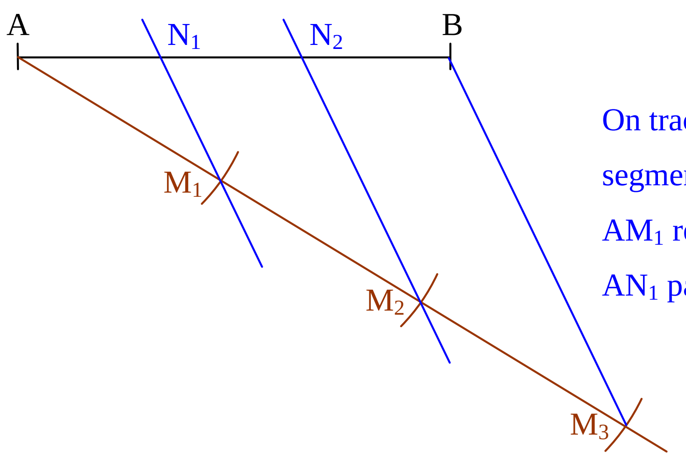
On trace une demi droite d'origine A.

On prend une ouverture de compas quelconque et on place les points

M_1, M_2 et M_3 de telle sorte que : $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3$

Ainsi AM_1 vaut le tiers de AM_3 et AM_2 les deux tiers de AM_3

Etape 2



On trace le segment [M_3B], puis la parallèle à ce segment passant par M_1. Elle coupe [AB] en N_1.

AM_1 représentant le tiers de AM_3, il en va de même de AN_1 par rapport à AB. Mission accomplie !

Remarque : on applique aussi cette méthode pour diviser un segment en autant de morceaux de même mesure que l'on souhaite