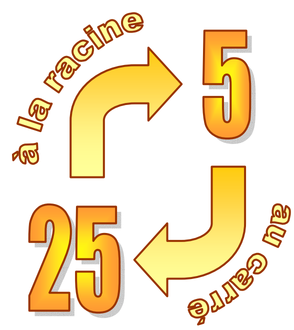
RACINES CARREES

Emilien Suquet, suquet@automaths.com

I Définitions, calcul avec les radicaux

La racine carrée d'un nombre positif b est le seul nombre positif d dont le carré est égal à b.
On a donc $d^2 = b$ et on note $d = \sqrt{b}$
Par définition, on a donc avec $b \geq 0$, $\sqrt{b} \geq 0$ et $(\sqrt{b})^2 = b$



Ex : $\sqrt{9} = 3$ (car $3^2 = 9$) ; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$

Remarque : les nombres négatifs n'ont pas de racine carrée

A partir de la définition, nous allons obtenir les trois règles suivantes :

Si b est un nombre positif, alors $\sqrt{b^2} = b$
Si b est un nombre négatif, alors $\sqrt{b^2} = -b$

$-b$ n'est pas forcement un nombre négatif.
$-b$ désigne l'opposé de b.

Démonstration :

Par définition on a : $\sqrt{b^2} = d$ avec $d \geq 0$ et $d^2 = b^2$
Comme $d^2 = b^2$, on a alors $d = b$ ou $d = -b$ (voir cours sur les équations)
1er cas : si b est positif, alors on prend $d = b$ car d doit être positif. On a donc $\sqrt{b^2} = b$
2ème cas : si b est négatif, alors on prend $d = -b$ car d doit être positif. On a donc $\sqrt{b^2} = -b$

Exemples : $\sqrt{3^2} = 3$; $\sqrt{(-5)^2} = 5 = -(-5)$; $\sqrt{10^6} = \sqrt{(10^3)^2} = 10^3$

Le produit de deux racines carrées est égal à la racine carrée du produit.
Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$: $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Démonstration :

$\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$
$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$ puisque $ab>0$
On a donc $\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{ab}\right)^2$ et on peut conclure car $\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$ et $\sqrt{ab} > 0$

Le quotient de deux racines carrées est égal à la racine carrée du quotient.
Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Démonstration :

$\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \dfrac{a}{b}$ et comme $\dfrac{a}{b} > 0$, on a aussi : $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2 = \dfrac{a}{b}$
On peut donc conclure de la même façon qu'à la question précédente

Evolution du symbole racine
1220 : R̸
1450 : R̸²
1525 : √
1572 : R.q.
1637 : $\sqrt{}$

Il faut parfaitement connaître son cours pour ne pas risquer d'inventer de nouvelles règles qui très souvent seront fausses. Par exemple $\sqrt{a + b}$ n'est pas du tout égale à $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

Les démonstrations de cette partie ne sont pas à apprendre mais à comprendre.

II Applications

a) Simplification d'écritures

On préfère écrire une racine sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers avec b le plus petit possible :

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = \sqrt{100} \times \sqrt{2} = \sqrt{10^2} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

On utilise ici la règle : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

On utilise ici la règle : $\sqrt{a^2} = a$

L'intérêt de modifier ainsi l'écriture des racines est, par exemple, de pouvoir simplifier des expressions numériques contenant des racines et des sommes.

$$\sqrt{\mathbf{50}} + 6\sqrt{2} = \sqrt{\mathbf{25 \times 2}} + 6\sqrt{2} = \mathbf{5\sqrt{2}} + 6\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$$

On préfère parfois ne pas avoir des fractions contenant des radicaux au dénominateur.
Il existe quelques techniques permettant de l'éviter :

$$A = \frac{25}{\sqrt{7}} = \frac{25 \times \sqrt{\mathbf{7}}}{\sqrt{7} \times \sqrt{\mathbf{7}}} = \frac{\mathbf{25\sqrt{7}}}{\mathbf{7}}$$

On multiplie le dénominateur et le numérateur par $\sqrt{7}$.

$$B = \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1} = \frac{(3+\sqrt{2}) \times (\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1) \times (\sqrt{5}-1)} = \frac{3\sqrt{5} - 3 + \sqrt{10} - \sqrt{2}}{5-1} = \frac{\mathbf{3\sqrt{5} - 3 + \sqrt{10} - \sqrt{2}}}{\mathbf{4}}$$

On multiplie le dénominateur et le numérateur par $\sqrt{5} - 1$.

On obtient ainsi une forme que l'on connaît bien : $(a + b)\,(a - b)$

b)Factorisations

En utilisant le fait que pour tout nombre positif b on a $\left(\sqrt{b}\right)^2 = b$, on effectue des factorisations :

$$A = 2x^2 + 6\sqrt{2}\,x + 9 = (\sqrt{2}x)^2 + 2 \times 3\sqrt{2}\,x + 3^2 = (\sqrt{2}\,x + 3)^2$$

$$B = x^2 - 5 = x^2 - (\sqrt{5})^2 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

$$C = 2x^2 - 7 = (\sqrt{2}x)^2 - (\sqrt{7})^2 = (\sqrt{2}x - \sqrt{7})(\sqrt{2}x - \sqrt{7})$$

Exemples similaires sans racine :

$$A' = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

$$B' = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

$$C' = 4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$$

c) Equations du type $x^2 = a$

L'équation $x^2 = a$ où x est l'inconnue possède 0, 1 ou 2 solutions suivant le signe de a.
$a < 0$: pas de solution
$a = 0$: 0 est l'unique solution de l'équation
$a > 0$: $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ sont les deux uniques solutions de l'équation

Démonstration :

a < 0 : un carré ne peut être négatif, l'équation n'a donc pas de solution

a = 0 : $x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$, l'équation a donc une unique solution 0

a > 0 : $x^2 = a$

$x^2 - a = 0$

$(x - a)(x + a) = 0$

ab = 0 si et seulement si a = 0 ou b = 0

$x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$

$x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

$S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$

Exemple : $x^2 = 5$

$x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$

L'équation a deux solutions : $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$

Attention : on a très souvent tendance à oublier la solution négative.

d) Développements

La présence de racines carrées dans des expressions numériques ou algébriques n'entraîne aucune modification des règles que l'on utilise pour les développements. Voici quelques exemples :

$A = (\sqrt{2} + 5)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 5 + 5^2 = 2 + 10\sqrt{5} + 25 = 27 + 10\sqrt{5}$ utilisation de la 1ère identité remarquable

$B = (\sqrt{2}\,x - 7)^2 = (\sqrt{2}\,x)^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 7 + 7^2 = 2x^2 - 14\sqrt{2} + 49$ utilisation de la 2ème identité remarquable

$C = (\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 3 - 5 = -2$ utilisation de la 3ème identité remarquable

$D = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - (\sqrt{2})^2 = x^2 - 2$ utilisation de la 3ème identité remarquable

$E = 4 \times (\sqrt{2} - 3) - \sqrt{5} \times (\sqrt{10} - 5) = 4\sqrt{2} - 12 - \sqrt{50} + 5\sqrt{5} = 4\sqrt{2} - 12 - 5\sqrt{2} + 5\sqrt{5} = -\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 12$

$F = \sqrt{2} \times (2x - \sqrt{6}) = 2\sqrt{2}\,x - \sqrt{12}$

$4\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 4 \times 5 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 20 \times 3 = \mathbf{60}$

En allant trop vite, on répond parfois $20\sqrt{3}$