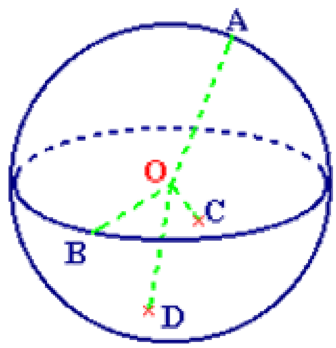
GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Emilien Suquet, suquet@automaths.com

Une des difficultés de la géométrie dans l'espace est de représenter les différentes situations sur des feuilles de papiers plates. Pour se faire, on dispose d'une technique : la représentation en perspective cavalière. Pour la maîtriser, il n'y a pas de secret … il faut s'entraîner. Dans ce cours, une partie des figures a donc été supprimée. A vous de les faire sur une feuille blanche et de les coller aux emplacements indiquées. Un conseil : n'hésitez pas à ouvrir votre livre de mathématiques pour y trouver des modèles dont vous pourrez vous inspirer.

I Sphères et boules



Une sphère de centre O et de rayon *r* est constituée de tous les points de l'espace situés à la distance *r* du centre O.

Une boule de centre O et de rayon *r* est constituée de tous les points de l'espace situés à une distance inférieur ou égal à *r*.

Remarques :

- Si OA = OB = OD = r, alors les points A, B et D appartiennent à la sphère de centre O et de rayon r.
- Si OD $\leq r$ alors le point D appartient à la boule de centre O et de rayon r.
- Sur la figure, on ne peut savoir ou se situe le point C. N'oubliez pas qu'il s'agit d'une représentation en perspective …

Dessiner ici une sphère avec deux de ses grands cercles

Un grand cercle d'une sphère de centre O et de rayon *r* est un cercle de centre O et de rayon *r*.

Remarque : Une sphère possède une infinité de grands cercles.

Volume d'une boule de rayon r : $\frac{4}{3}\pi r^3$

Aire d'une sphère de rayon r : $4\pi r^2$

La section d'une sphère par un plan est un cercle

Dem : voir activité 1

Remarques :

- On admettra dans la figure de droite que le triangle OMO' est rectangle en M.
- Dans les exercices sur les sections de sphères, il est souvent très utile de placer les points M, O' et O même si l'énoncé ne le demande. Ensuite on applique très souvent le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OMO'.

Coller ici le dessin en perspective d'une sphère coupée par un plan. On représentera la section circulaire ainsi obtenue. On placera les points suivants : O centre de la sphère, O' le centre de la section et M un point de la section.

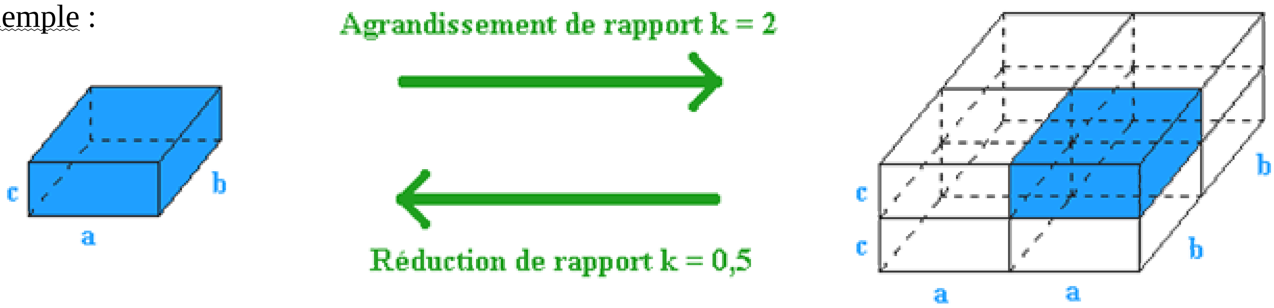
On marquera l'angle droit $\widehat{OMO'}$

II Pyramides et cônes

<u>L'agrandissement de rapport *k*</u> d'un solide ou d'une figure plane est la transformation qui multiplie toutes les longueurs du solide ou de la figure plane par un nombre k strictement supérieur à 1.

<u>La réduction de rapport *k*</u> d'un solide ou d'une figure plane est la transformation qui multiplie toutes les longueurs du solide ou de la figure plane par un nombre k strictement inférieur à 1.

Exemple :



Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3.

Démonstration : admise mais très facile à montrer pour les parallélépipèdes rectangles (cf. exercice).

La section d'une pyramide (ou d'un cône) par un plan parallèle à la base est une réduction de la base de la pyramide (ou du cône).

La "petite pyramide" (ou le petit cône) ainsi obtenus est une réduction de la pyramide initiale (ou du cône initiale).

Démonstration : cf. Activité

Dessiner un cône de sommet S avec O pour centre de sa base. Représenter la section circulaire de ce cône par un plan parallèle à sa base. Placer le centre O'de cette section Placer un point A sur le cercle de base. Tracer le segment [SA], il coupe la section en A'	*Dessiner une pyramide ABCDS de sommet S avec pour base un trapèze. Dessine ensuite la section A'B'C'D' de cette pyramide par un plan parallèle à sa base (S, A, A' alignés ainsi que S, B', B)*

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA}$$

$$\mathcal{A}_{\text{base du petit cône}} = k^2 \times \mathcal{A}_{\text{base du grand cône}}$$

$$\mathcal{V}_{\text{petit cône}} = k^3 \times \mathcal{V}_{\text{grand cône}}$$

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \ldots$$

$$\mathcal{A}_{A'B'C'D'} = k^2 \times \mathcal{A}_{ABCD}$$

$$\mathcal{V}_{SA'B'C'D'} = k^3 \times \mathcal{V}_{SABCD}$$

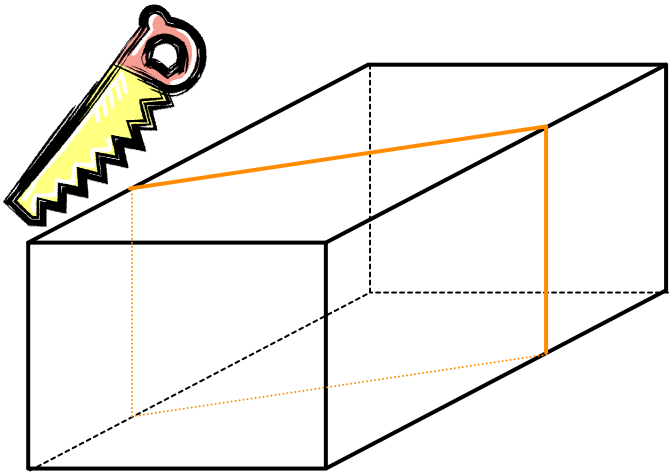
Volume d'une pyramide = $\dfrac{\textbf{Aire de la base} \times \textbf{hauteur}}{\textbf{3}}$

Volume d'un cône = $\dfrac{\textbf{Aire de la base} \times \textbf{hauteur}}{\textbf{3}}$

Mettre ici deux petits dessins : l'un d'une pyramide et l'autre d'un cône.
Pour les deux, on représentera la hauteur et on grisera légèrement la base.

III Parallélépipèdes et cubes

La section d'un pavé droit ou d'un cube par un plan perpendiculaire ou parallèle à une face est un rectangle ou un carré.



Sur la figure à gauche marquer les 4 angles droits de la section ainsi que les distances égales.

Dans ce cadre, coller un dessin en perspective d'un cube coupée par un plan parallèle à une de ses faces et mettez en évidence sur le dessin la section ainsi obtenue.

Volume d'un pavé = Aire de la base × hauteur

IV Prismes et cylindre

La section d'un prisme ou d'un cylindre par un plan parallèle sa base est identique à la base.

à vous d'illustrer le théorème…

La section d'un prisme ou d'un cylindre par un plan perpendiculaire à sa base est un rectangle

à vous d'illustrer le théorème…

Volume d'un prisme = Aire de la base × hauteur

Volume d'un prisme = Aire de la base × hauteur