EQUATIONS

Emilien Suquet, suquet@automaths.com

I Rappels

Soit une équation $4x + 5 = 2x - 4$:

x est **l'inconnue** de l'équation (la valeur que l'on cherche à déterminer)

Le membre de gauche de l'équation est : $4x + 5$. **Le membre de droite** de l'équation est : $2x - 4$

Résoudre l'équation $4x + 5 = 2x - 4$, c'est répondre à la question : « Quelles sont toutes les valeurs de x qui vérifient $4x + 5 = 2x - 4$?»

1) Modifier une équation sans changer ses solutions

Si on ajoute ou retranche aux deux membres d'une équation une même valeur alors on ne modifie pas les solutions de l'équation.

$4x + 5 = 3x + 7$

$4x + 10 = 3x + 12$

On ajoute 5 à chaque membre de l'équation.

Les solutions de $4x + 10 = 3x + 12$ sont donc identiques à celles de $4x + 5 = 3x + 7$

Si on multiplie ou divise les deux membres d'une équation par une même valeur <u>non nulle</u> alors on ne modifie pas les solutions de l'équations

$2x = 8$

$6x = 24$

On multiplie par 3 chaque membre de l'équation.

Les solutions de $2x = 8$ sont donc identiques à celles de $6x = 24$

En retranchant 5 aux deux membres de l'équation $4x + 10 = 3x + 12$, on retrouve $4x + 5 = 3x + 7$
En divisant les deux membres de l'équation $6x = 24$ par 3, on retrouve $2x = 8$
Cette possibilité de « marche arrière » est ce qui garantit que les équations ont bien les mêmes solutions.

2) Principe de la résolution d'équations

Pour résoudre une équation, on cherche une autre équation beaucoup plus simple qui aura exactement les mêmes solutions.

Equation 1 à résoudre : $4x + 5 = 3x + 7$

Equation 2 : $4x = 3x + 2$ (On a retranché 5 à chaque membre de l'équation précédente)

Equation 3 : $x = 2$ (On a retranché $3x$ à chaque membre de l'équation précédente)

Les équations 1, 2 et 3 ont exactement les mêmes solutions puisque l'on a utilisé des règles autorisées.

L'équation 3 permet de les trouver facilement : il n'y a qu'une seule solution : 3.

Pratiquement on rédigera de la façon suivante :

$$4x + 5 = 3x + 7$$
$$4x = 3x + 2$$
$$x = 2$$

<u>Il y a une seule solution : 2</u>

On peut remplacer la phrase de conclusion par $S = \{ 2 \}$

II Equations produit

On appelle « équation produit » une équation qui s'écrit sous la forme d'un produit de facteurs égal à zéro.

Exemple : $(2x + 3)(4x - 2) = 0$ est une équation produit

Théorème 1 : Si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$

Théorème 2 : Si $a = 0$ ou $b = 0$ alors $ab = 0$

On peut remarquer que le théorème 2 est la réciproque du théorème 1.
Ces deux théorèmes permettent de modifier une « équation produit » :

$(2x + 3)(4x - 2) = 0$

si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$

$2x + 3 = 0$ ou $4x - 2 = 0$

si $a = 0$ ou $b = 0$ alors $ab = 0$

Le fait de pouvoir passer **de « (2x + 3)(4x – 2) = 0 »** à **« 2x + 3 = 0 ou 4x – 2 = 0 »** dans les deux sens est ce qui garantit que les deux questions ci-dessous ont exactement les mêmes réponses :

« Quelles sont toutes les valeurs de x tel que $(2x + 3)(4x - 2) = 0$?»
« Quelles sont toutes les valeurs de x tel que $2x + 3 = 0$ ou $4x - 2 = 0$?»

Pratiquement, on rédigera de la façon suivante la résolution de telles équations :

$(2x + 1)(4x - 1) = 0$
$ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$
$2x + 1 = 0$ ou $4x - 1 = 0$
$x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{4}$
$\boxed{S = \left\{ -\frac{1}{2} , \frac{1}{4} \right\}}$

$(x + 1)^2 = 0$
$a^2 = 0$ si et seulement si $a = 0$
$x + 1 = 0$
$x = -1$
$\boxed{S = \{ -1 \}}$

Remarque :

- « $ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$ » est une synthèse des théorèmes 1 et 2.
- « $a^2 = 0$ si et seulement si $a = 0$ » se déduit des théorèmes 1 et 2 en prenant $a = b$.

III Méthodologie pour la résolution d'équations

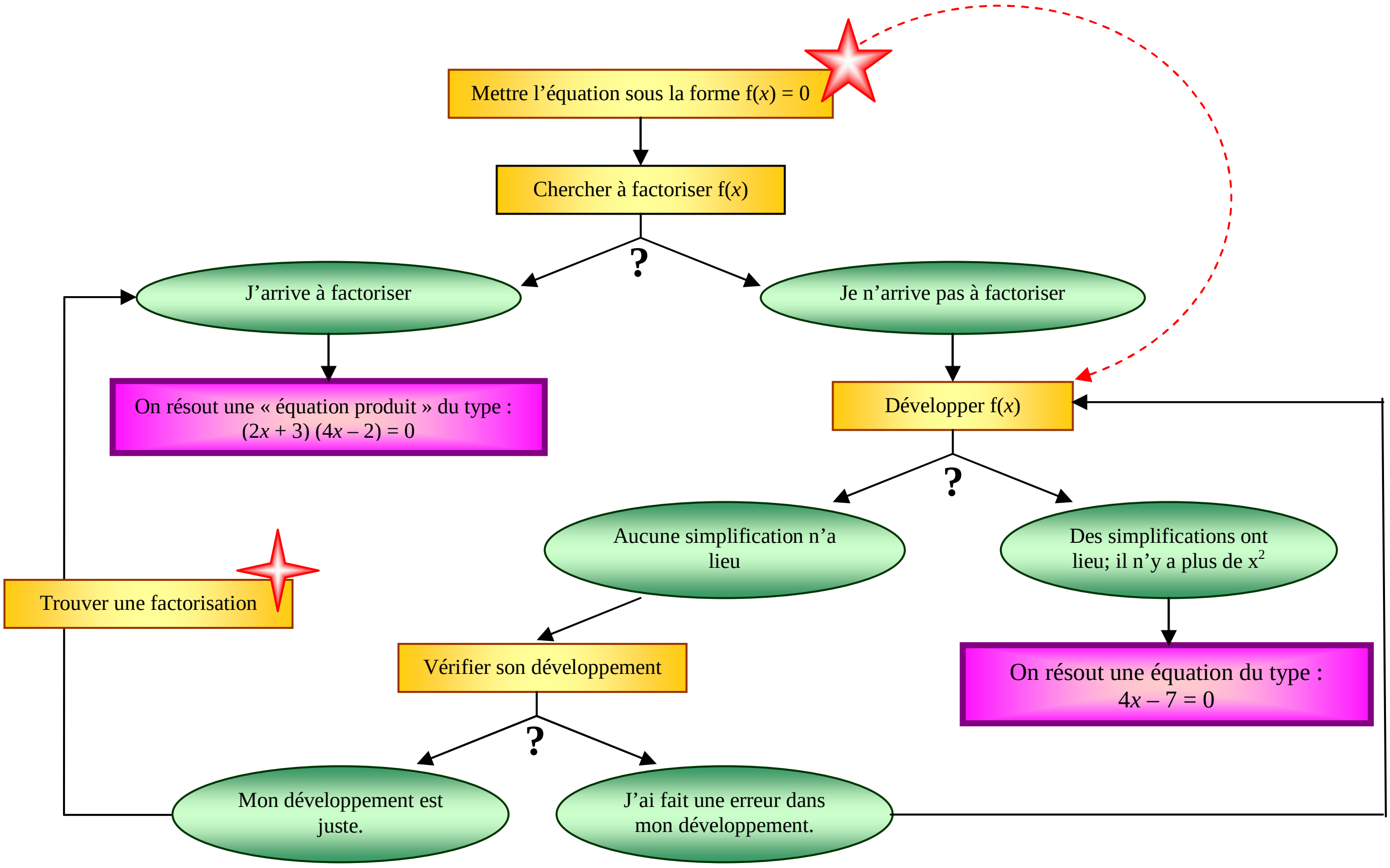
Vous pouvez maintenant résoudre les trois types d'équations suivantes :

$\frac{x}{2} + \frac{x + 3}{4} + x + 5 = 0$
$\frac{2x}{4} + \frac{x + 3}{4} + \frac{4x + 20}{4} = 0$
$\frac{7x + 23}{4} = 0$
$7x + 23 = 0$
$\boxed{S = \left\{ -\frac{23}{7} \right\}}$

$(x + 1)^2 = (2x - 1)^2 - 3x$
$x^2 + 2x + 1 = 4x^2 - 4x + 1 - 3x^2$
$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 4x + 1$
$2x + 1 = -4x + 1$
$6x = 0$
$x = 0$
$\boxed{S = \{ 0 \}}$

$(x + 4)^2 = 25$
$(x + 4)^2 - 25 = 0$
$[(x + 4) - 5][(x + 4) + 5] = 0$
$ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$
$x + 4 - 5 = 0$ ou $x + 4 + 5 = 0$
$x - 1 = 0$ ou $x + 9 = 0$
$\boxed{S = \{ 1 ; -9 \}}$

Le problème va donc être maintenant pour vous de savoir comment s'y prendre pour résoudre une équation : faut-il développer ?, factoriser ? … Voici un graphique qui vous guidera dans vos choix :



Attention :

Si vous voyez tout de suite qu'il ne faut pas factoriser pour résoudre l'équation, il n'est alors pas nécessaire de la mettre sous la forme $f(x) = 0$.

Si vous n'avez pas vu une factorisation la première fois, c'est certainement qu'elle n'est pas évidente et qu'il s'agit probablement d'une factorisation par étapes.

Le graphique ci-dessus n'est à utiliser que par des élèves de troisième sachant que l'on part du principe que l'on demande à un élève de résoudre seulement les équations dont il est théoriquement capable de trouver les solutions.

Nous avons essentiellement parlé de méthodes dans ce cours. Les comprendre est une très bonne chose, mais la principale difficulté est de savoir les appliquer. Il est donc indispensable de beaucoup s'entraîner à partir des feuilles d'exercices.