Systèmes linéaires à 2 inconnues

Emilien Suquet, suquet@automaths.com

0 Introduction

Equation linéaire à deux inconnues

$2x + y = 4$ est une équation linéaire à deux inconnues x et y.

La résoudre, c'est rechercher tous les couples de solutions (x,y) qui vérifient l'équation $2x + y = 4$.

$(2, 3)$ n'est pas un couple solution car il ne vérifie pas l'équation : $2 \times 2 + 3 = 7 \neq 4$

$(1, 3)$, $(-2, 8)$ sont des couples solution : $2 \times 1 + 3 = 7$ et $2 \times (-2) + 8 = 7$

On dit que **deux équations sont équivalentes** si elles ont exactement les même solutions.

⧗ Si on multiplie, divise, additionne ou soustrait les deux membres d'une équation (E) par un même nombre non nul, on obtient une équation (E') équivalente à (E)

Système de deux équations linéaires à deux inconnues

$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + y = 6 \end{cases}$ est un système linéaire à deux équations deux inconnues

Le résoudre, c'est rechercher tous les couples de solutions (x,y) qui vérifient **simultanément** les deux équations $2x + 3y = 8$ et $4x + y = 6$

$(1, 3)$ n'est pas un couple solution car il ne vérifie pas la première équation : $2 \times 1 + 3 \times 3 = 11 \neq 8$

$(2, -2)$ n'est pas une solution car il ne vérifie pas la première équation (il vérifie pourtant la seconde)

$(1, 2)$ est un couple solution : $2 \times 1 + 3 \times 2 = 8$ **ET** $4 \times 1 + 2 = 6$

On dit que **deux systèmes sont équivalent** s'ils ont exactement les mêmes solutions.

⧗ Il existe des manipulations qui permettent de transformer un système (S) en un système (S') équivalent. Nous allons en étudier trois dans le paragraphe suivant

I Résolution d'un système

Les manipulations A, B et C présentées ci-dessous permettent de modifier un système sans en modifier ses solutions.

Manipulation A : modification d'une équation

On peut modifier un système sans en changer ses solutions en remplaçant une de ses équations par une équation équivalente :

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

x = y – 1 est une équation équivalente à x – y = -1

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 0.5y = 1.5 \end{cases}$$

$2x + 3y = 7$ est une équation équivalente à $x + 0.5\,y = 1.5$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Manipulation B : substitution

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

On sait que x vaut $y - 1$, on remplace donc dans la première équation x par cette valeur : y - 1

$$\begin{cases} 2\,(\boldsymbol{y - 1}) + y = 4 \\ x = \boldsymbol{y - 1} \end{cases}$$

on peut maintenant terminer la résolution :

$$\begin{cases} 2y - 2 + y = 4 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = 6 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{(par substitution)}$$

$$\boxed{S = \{ (1\,;2) \}}$$

Lorsque l'on résout un système en utilisant seulement la manipulation A et la manipulation B, on dit que l'on **résout le système par substitution**.

Manipulation C : combinaison linéaire

On peut remplacer une des deux équations d'un système par la somme (ou la différence) des deux équations du système. Il faut alors absolument garder l'autre équation.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

On remplace la seconde ligne par la différence des deux lignes du système et on garde la première.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ (\,2x + 3y\,) - (\,2x + y\,) = 7 - 3 \end{cases}$$

on peut maintenant terminer la résolution :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3 \times 2 = 7 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{(par substitution)}$$

$$\begin{cases} x = 0.5 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \boxed{S = \{ (0.5\,;2) \}}$$

Lorsque l'on résout un système en utilisant la manipulation C, on dit que l'on **résout le système par combinaisons linéaires**.

Quelle méthode utiliser ?

Vous êtes libre du choix à moins que l'énoncé impose la méthode à utiliser.

Ceci dit, je vous recommande la méthode par combinaisons linéaires car elle permet de limiter d'en beaucoup de cas les calculs avec des fractions.

III Interprétation graphique

Reprenons l'exemple du I : $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$

On peut écrire ce système sous la forme : $\begin{cases} y = 4 - 2x \\ y = x + 1 \end{cases}$ (on a effectué une modification de type A)

On remarque que les deux équations sont écrites sous la forme d'équation de droite :
(d1) : $y = 4 - 2x$
(d2) : $y = x + 1$

Traçons ces deux droites :

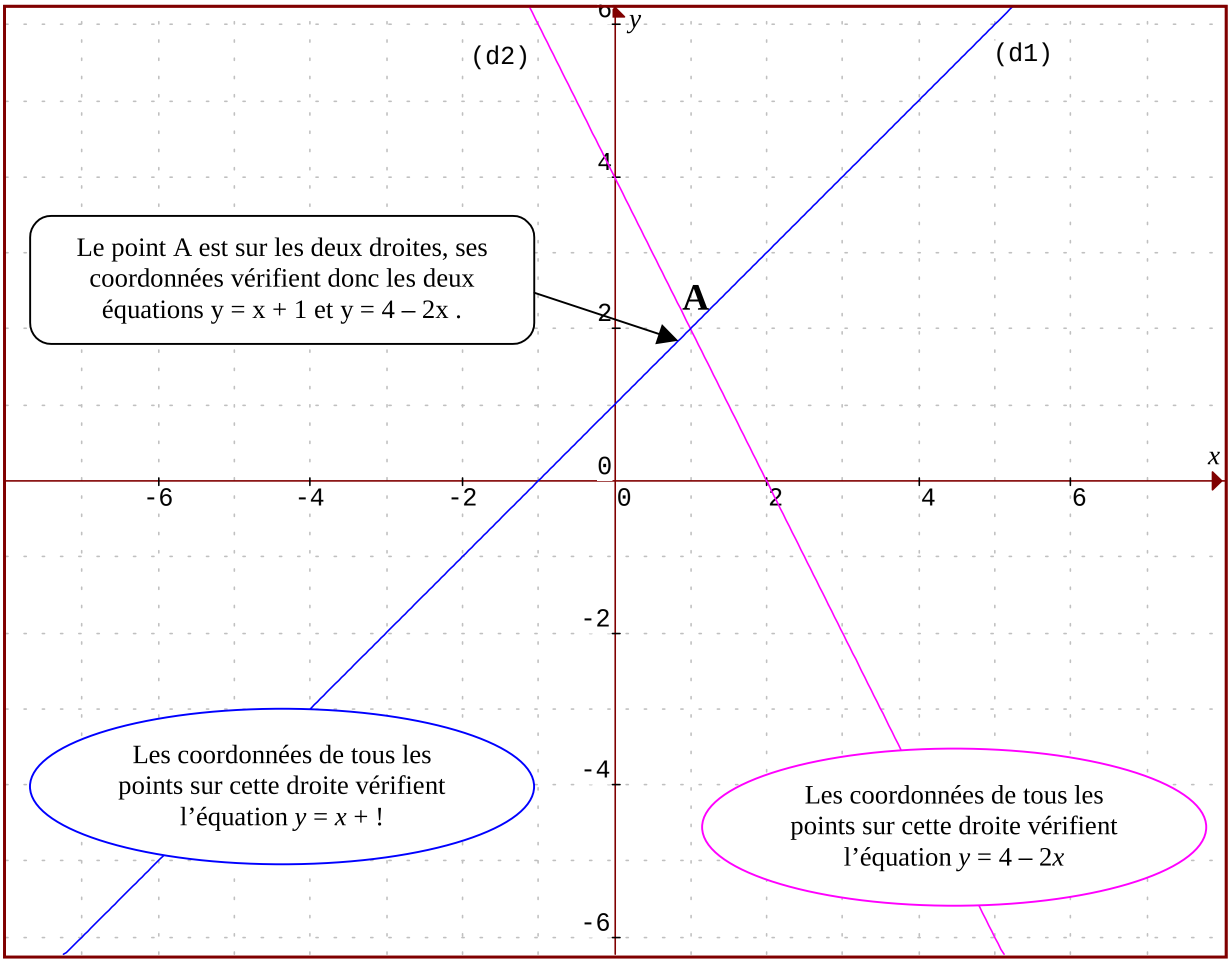
(d1) :

x	0	3
y	4	-2

(d2) :

x	0	4
y	1	5

Tableau de valeurs pour tracer la droite (d2)



Le couple de coordonnée (1 ; 2) point d'intersection des deux droites est donc solution du système.

Attention : il ne s'agit ici que d'une lecture graphique qui ne peut être une méthode valable pour obtenir les solutions exactes d'un système.

II Vérification, présentation

La résolution d'un système entraîne un nombre important de calculs. Il y a donc un grand risque que vous commettiez des erreurs d'étourderie. Pour minimiser ce risque vous ferez donc bien attention à vérifier votre résultat et à bien présenter votre résolution.

Vérification

Il est tout d'abord indispensable de toujours vérifier sa solution lors d'une résolution de système.

Reprenons un exemple du I : $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$ S = $\{ (1 ; 2) \}$

Vérifions : $2 \times 1 + 2 = 2 + 2 = 4$ → pas de problème pour la première équation
$1 - 2 = -1$ → pas de problème pour la seconde équation

Conclusion : la solution trouvée est bonne

Remarque : cette vérification doit se faire sur votre brouillon, sauf si l'énoncé de l'exercice le demande.

Présentation

Si vous avez détecté une erreur il va donc falloir relire votre travail. Il est donc essentiel que celui-ci soit parfaitement présenté. D'autre part, une résolution de système non présentée correctement comme ci-dessous pourra ne pas être lue par un correcteur.

Méthode par substitution : il suffit juste d'indiquer le moment où vous effectuer la substitution.

Méthodes par combinaisons linéaires : il faut indiquer comme ci-dessous les opérations que vous effectuez sur les lignes.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 & \text{(L1)} \\ x + 0.5y = 1.5 & \text{(L2)} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \\ 2 \times \text{(L2)} \end{array} \begin{cases} 2x + 3y = 7 & \text{(L1)'} \\ 2x + y = 3 & \text{(L2)'} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \\ \text{(L1)'} - \text{(L2)'} \end{array} \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3 \times 2 = 7 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{(par substitution)}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{S = \left\{ \left(\frac{1}{2} ; 2 \right) \right\}}$$