Développements – Factorisations

Emilien Suquet, suquet@automaths.com

I Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

En cinquième vous avez appris que la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$k \times (c + d) = k \times c + k \times d$$

Puis en quatrième, vous avez découvert la relation suivante :

$$(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Démonstration :
on utilise la relation vue en cinquième en remplaçant k par $a + b$
$(a + b) \times (c + d) = (a + b) \times c + (a + b) \times d = ac + bc + ad + bd$

Cette année, voici trois nouvelles relations, appelés identités remarquables :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b) (a + b) = a^2 - b^2$$

Démonstration :
on utilise la relation vue en quatrième
$(a + b)^2 = (a + b) (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = (a - b) (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a - b) (a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$

II Développement – Factorisation

On appelle expression algébrique, une expression comprenant à la fois des nombres et des inconnues.

ex : $2x + 5 - y$ et $(3x - 4) (2x + 1)$ sont des expressions algébriques.

On appelle expression numérique, une expression ne contenant que des nombres.

ex : $2 \times (3 + 4) - 5^5$ et $(4 - 5) \times 3$ sont des expressions numériques.

Remarque : une expression numérique est aussi une expression algébrique.

On appelle somme algébrique, une expression algébrique ne contenant aucune parenthèse et écrite comme sommes ou différences d'expressions algébriques

ex : $\boxed{2x^3} + \boxed{4x} - \boxed{1}$ $\quad$ $\boxed{4x^5} - \boxed{4}$ $\quad$ $\boxed{2x^2} - \boxed{5x} + \boxed{2}$ sont des sommes algébriques.

Développer une expression algébrique, c'est la transformer en une somme algébrique

Factoriser une expression algébrique, c'est la transformer en un produit de sommes algébriques

Développement →

$$k \times (c + d) = k \times c + k \times d$$

$$(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b) (a + b) = a^2 - b^2$$

← **Factorisation**

III Exemples

L'ensemble des exemples ci-dessus a pour objectif de vous montrer l'ensemble des compétences attendues par un élève en fin de troisième.

a) Développement

$A = (b + 2) (b - 3) = b^2 - 3b + 2b - 6 = \boxed{b^2 - b - 6}$

$B = (b - 5) (-5 - b) = -5b - b^2 + 25 + 5b = \boxed{25 - b^2}$

$C = 5 (3 - d) + (7 - d) \times 3 = 15 - 5d + 21 - 3d = \boxed{36 - 8d}$

$D = (q - 4) (q - 3) - 5 (q + 3) = q^2 - 3q - q + 12 - (5q + 15) = q^2 - 4q + 12 - 5q - 15 = \boxed{q^2 - 9q - 3}$

$E = (d - 3)^2 = \boxed{d^2 - 6d + 9}$

$F = (h - 5)^2 - (h - 8)^2 = h^2 - 10h + 25 - (h^2 - 16h + 64) = h^2 - 10h + 25 - h^2 + 16h - 64 = \boxed{6h - 39}$

$G = (a - 2) (2a - 4) (1 - a) = (2a^2 - 4a - 4a + 8) (1 - a) = (2a^2 - 8a + 8) (1 - a)$
$G = 2a^2 - 2a^3 - 8a + 8a^2 + 8 - 8a = \boxed{-2a^3 + 10a^2 - 16a + 8}$

$H = (h + 3)^3 = (h + 3)^2 (h + 3) = (h^2 + 6h + 9) (h + 3) = h^3 + 3h^2 + 6h^2 + 18h + 9h + 27$
$H = \boxed{h^3 + 9h^2 + 27h + 27}$

b) Factorisations

On a volontairement mis des lettres majuscules dans les sous-titres pour faire comprendre que l'on peut mettre n'importe quelle expression algébrique à la place d'une lettre majuscule.

Exemple : **K**A + KB = **K** (A + B)
On peut prendre **K** $= \mathbf{2}h + \mathbf{3}$, A $= h^2 + 1$ et B $= 6$
On obtient alors : $(2h + 3) (h^2 + 1) + (2h + 3) \times 6 = (2h + 3) [(h^2 + 1) + 6] = (2h + 3) (h^2 + 7)$

- $\underline{K A + K B = K (A + B)}$

$A = (h+3)(2h+4) + (h+8)(h+3)$
$A = (h+3)[(2h+4)+(h+8)]$
$A = (h+3)(3h+12)$
$\boxed{A = 3(h+4)(h+3)}$

la factorisation n'est pas terminée car
$(3h+12) = 3(h+4)$

$B = (2h-5)(h-1) - (2h-5)(2h-3)$
$B = (2h-5)[(h-1)-(2h-3)]$
$B = (2h-5)[h-1-2h+3]$
$\boxed{B = (2h-5)(-h+2)}$

Attention : il y a un signe – devant les parenthèses $-(2h-3) = -2h+3$

$C = (h+1)(h+2) + (h+1)(2h-1) - (h+1)h$
$C = (h+1)[(h+2)+(2h-1)-h]$
$C = (h+1)[h+2+2h-1-h]$
$\boxed{C = (h+1)(2h+1)}$

$D = (h+4)(2h-2)(3h-1) + (h+4)(2h-2)(5h-3)$
$D = (h+4)(2h-2)[(3h-1)+(5h-3)]$
$D = (h+4)(2h-2)[8h-4]$
$D = (h+4) \times 2 \times (h-1) \times 4(2h-1)$
$\boxed{D = 8(h+4)(h-1)(2h-1)}$

- $\underline{KA + K = KA + K \times 1 = K(A+1)}$

$E = (h-5)(2h-4) + (h-5)$
$E = (h-5)[(2h-4)+1]$
$\boxed{E = (h-5)(2h-3)}$

$F = (2h-1)(3h-4) - (3h-4)$
$F = (3h-4)[(2h-1)-1]$
$F = (3h-4)(2h-2)$
$\boxed{F = 2(3h-4)(h-1)}$

$G = (2h-1)(h+1) + h + 1$
$G = (2h-1)(h+1) + (h+1)$
$G = (h+1)[(2h-1)+1]$
$\boxed{G = 2h(h+1)}$

$H = (-h+4)(2h-4) - h + 4$
$H = (-h+4)(2h-4) + (-h+4)$
$H = (-h+4)[(2h-4)+1]$
$\boxed{H = (-h+4)(2h-3)}$

- $K^2 + KA = K \times K + KA = K (K + A)$

$I = (2h - 5)^2 - (2h - 5) (2h + 2)$
$I = (2h - 5) (2h - 5) - (2h - 5) (2h + 2)$
$I = (2h - 5) [(2h - 5) - (2h + 2)]$
$I = (2h - 5) [2h - 5 - 2h - 2]$
$\boxed{I = -7 (2h - 5)}$

$J = (h - 4)^2 + h - 4$
$J = (h - 4) (h - 4) + (h - 4)$
$J = (h - 4) [(h - 4) + 1]$
$\boxed{J = (h - 4) (h - 3)}$

- $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$ et $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$

$K = 4h^2 + 12h + 9$
$K = (2h)^2 + 12h + 3^2$
$\boxed{K = (2h + 3)^2}$

Attention : il faut vérifier que l'on a bien $2 \times 2h \times 3 = 12h$

$L = -18h + 1 + 81 h^2$
$L = 81h^2 - 18h + 1$

Remettez les termes dans l'ordre *h*abituel pour éviter toutes erreurs d'étourderie

$L = (9h)^2 - 18h + 1^2$
$\boxed{L = (9h - 1)^2}$

il faut vérifier que l'on a bien $2 \times 9h \times 1 = 18h$

- $A^2 - B^2 = (A - B) (A + B)$

$M = h^2 - 4$
$M = h^2 - 2^2$
$\boxed{M = (h - 2) (h + 2)}$

$N = -36h^2 + 9$
$N = 9 - 36h^2$

Remettez les termes dans l'ordre *h*abituel pour éviter toutes erreurs d'étourderie

$N = 3^2 - (6h)^2$
$N = (3 - 6h) (3 + 6h)$
$N = 3 (1 - 2h) 3 (1 + 2h)$
$\boxed{N = 9 (1 - 2h) (1 + 2h)}$

$O = (2h - 1)^2 - 81$
$O = (2h - 1)^2 - 9^2$
$O = [(2h - 1) - 9] [(2h - 1) + 9]$
$O = (2h - 10) (2h + 8)$
$\boxed{O = 4 (h - 5) (h + 4)}$

$P = (3h - 2)^2 - (h + 1)^2$
$P = [(3h - 2) - (h + 1)] [(3h - 2) + (h + 1)]$
$\boxed{P = (2h - 3) (4h - 1)}$

$Q = 9 (h - 1)^2 - 16$
$Q = [3 (h - 1)]^2 - 4^2$
$Q = [3 (h - 1) - 4] [3 (h - 1) + 4]$
$Q = (3h - 3 - 4) (3h - 3 + 4)$
$\boxed{Q = (3h - 7) (3h + 1)}$

$R = 9 (2h + 1)^2 - 16 (-h + 2)^2$
$R = [3 (2h + 1)]^2 - [4 (-h + 2)]^2$
$R = [3 (2h + 1) - 4 (-h + 2)] [3 (2h + 1) + 4 (-h + 2)]$
$R = [6h + 3 + 4h - 8] [6h + 3 - 4h + 8]$
$R = (10h - 5) (2h + 11)$
$\boxed{R = 5 (2h - 1) (2h + 11)}$

- quelques factorisations « cach*é*es »

$S = (h + 4) (2h - 3) + (h - 2) (4h - 6)$
$S = (h + 4) (2h - 3) + (h - 2) \times 2 \times (2h - 3)$
$S = (2h - 3) [(h + 4) + 2 (h - 2)]$
$S = (2h - 3) [h + 4 + 2h - 4]$
$\boxed{S = 3h (2h - 3)}$

$T = (2h + 1) (-5h + 3) + 5h - 3$
$T = (2h + 1) (-5h + 3) - (-5h + 3)$
$T = (-5h + 3) [(2h + 1) - 1]$
$\boxed{T = 2h (-5h + 3)}$

$U = 8 - 24h + 18h^2$
$U = 2 (4 - 12h + 9h^2)$
$\boxed{U = 2 (2 - 3h)^2}$

$V = -h^2 - 2h - 1$
$V = -(h^2 + 2h + 1)$
$\boxed{V = -(h + 1)^2}$

$W = (2h + 2)^2 - (h + 3) (h + 1)$
$W = [2 (h + 1)]^2 - (h + 3) (h + 1)$
$W = 4 (h + 1)^2 - (h + 3) (h + 1)$
$W = (h + 1) [4 (h + 1) - (h + 3)]$
$W = (h + 1) [4h + 4 - h - 3]$
$\boxed{W = (h + 1) (3h + 1)}$

- Factorisations en deux temps

$X = (h + 1) (h + 2) + h^2 + 2h + 1$
$X = \mathbf{(h + 1)} (h + 2) + (\mathbf{h + 1})^2$
$X = \mathbf{(h + 1)} [h + 2 + h + 1]$
$\boxed{X = (h + 1) (2h + 3)}$

Y a plus rien à ajouter ….

Zzzzzz : vous avez bien mérité un petit repos si vous êtes arrivés sans encombre jusqu'ici