ARITHMETIQUE

Emilien Suquet, suquet@automaths.com

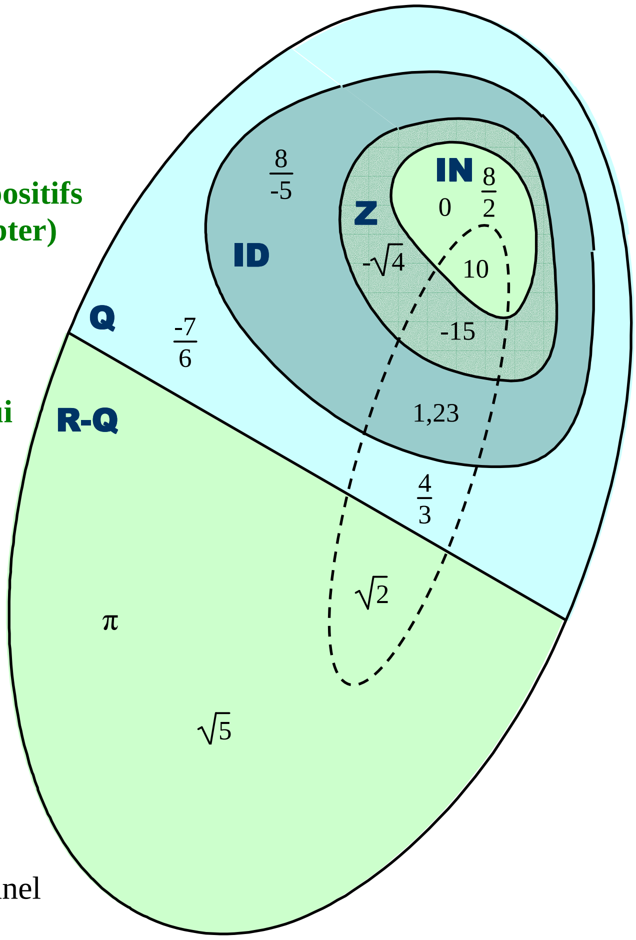
I Introduction aux différents ensembles de nombres

L'ensemble de tous les nombres se nomme l'ensemble des réels.
On le note IR (de *real* en allemand)

On peut distinguer dans IR beaucoup de sous ensembles : les nombres plus grands que 1000, les nombres dont le premier chiffres en écriture décimale est un 1 (ensemble en pointillé sur le graphique), les nombres pairs, les nombres impairs, …
Les ensembles suivants sont souvent utilisés en mathématiques :

Entiers naturels : c'est l'ensemble de tous les entiers positifs ou nuls.
On le note IN (de l'italien *naturale*)

Ex : 0 ; 1 ; 2 ; $\sqrt{4}$; $\frac{16}{4}$



Entiers relatifs : c'est l'ensemble de tous les entiers positifs et négatifs. On le note Z (de l'allemand *zahlen* = compter)

Ex : 0 ; 1 ;-3 ; -$\sqrt{4}$; $\frac{16}{-4}$

Nombres décimaux : c'est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire avec un nombre fini de décimales.
En France, on le note ID (du français *décimale*)

Ex : 2 ; -0,123 ; 9,12 ; $\frac{5}{2}$

Nombres rationnels : c'est l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous forme d'une fraction d'entiers relatifs. On le note Q (de l'italien *quotiente*)

Ex : 3 ; $\frac{1}{3}$; $\frac{16}{-4}$; 2,5

Remarque : un entier n pouvant s'écrire $\frac{n}{1}$ est donc rationnel

Attention ! $\frac{2{,}23}{5}$ n'est pas une fraction mais une écriture fractionnaire

Nombres irrationnels : c'est l'ensemble des nombres qui ne sont pas rationnels ; que l'on ne peut donc pas écrire sous forme de fraction.
On le note IR – Q (ensemble des réels privé des rationnels)

Pour en connaître un peu plus sur l'histoire des nombres, je vous conseille un site Internet :

http://www.col-camus-soufflenheim.ac-strasbourg.fr/Page.php?IDP=137&IDD=0

II Etude de l'ensemble des entiers naturels

L'étude des propriétés des nombres entiers et rationnels se nomme l'arithmétique.

a) Diviseurs d'un entier

***a* et *b* sont deux entiers.**

On dit que *b* est un diviseur de *a* ou que *a* est divisible par *b* si $\frac{a}{b}$ est un entier.

Ex : 5 est un diviseur de 30 car $\frac{30}{5} = 6$ est un entier.

$2^{30\,402\,457} - 1$ est le plus grand nombre premier connu en 2005. Son ordre de grandeur est de : $10^{9\,152\,052}$

Un entier est premier lorsqu'il n'a que deux diviseurs : 1 et lui même

Ex : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 sont les nombres premiers plus petit que 20.

Un entier est divisible par …

… 2 si son chiffre des unités est pair.

… 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

… 4 si le nombre constitué par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

… 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5

… 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9

… 10 si son dernier chiffre est un 0

Comment trouver tous les diviseurs de 156 ?

156 : 2 = 78 donc **2** est un diviseur ainsi que **78** car 156 : 78 = 2

156 : 3 = 52 donc **3** est un diviseur ainsi que **52** car 156 : 52 = 3

156 : 4 = 39 donc **4** est un diviseur ainsi que **39** car 156 : 39 = 4

156 : 5 = 31,2

156 : 6 = 26 donc **6** est un diviseur ainsi que **26** car 156 : 26 = 6

156 : 7 ≈ 22,3

156 : 8 = 19,5

156 : 9 ≈ 17,3 à 0,1 près

156 : 10 = 15,6

156 : 11 ≈ 14,2 à 0,1 près

156 : 12 = 13 donc **12** est un diviseur ainsi que **13** car 156 : 13 = 12

On peut arrêter ici la recherche car on connaît déjà les diviseurs plus grands que 12.

On a donc 12 diviseurs de 156 : **1, 2, 3, 4, 6, 12, 13, 26, 39, 52, 78, 156.**

TOP 4
des entiers plus petits que 1000 qui ont le plus de diviseurs :

840 (32 diviseurs)

720 (30 diviseurs)

960 (28 diviseurs)

900 (27 diviseurs)

Remarque :

- Un moyen rapide de savoir à l'avance lorsque l'on arrêtera la recherche est de calculer $\sqrt{156} \approx 12,5$
  On pourra donc s'arrêter à 12, plus grand entier inférieur à $\sqrt{156}$
- Ici, 156 est divisible par 2 et par 4 mais il ne l'est pas par 8. Pourtant 8 = 2 × 4 !

b) Diviseurs communs à deux nombres entiers

On dit que *d* est un <u>diviseur commun</u> de *a* et *b* si *d* divise à la fois *a* et *b*.

Déterminons tous les diviseurs communs de 24 et 34

$\sqrt{24} \approx 4{,}9$ 0 à 0,1 près
$1 \times 24 = 24$
$2 \times 12 = 24$
$3 \times 8 = 24$
$4 \times 6 = 24$
24 est divisible par : **1 - 2** - 3 - 4 - 6 - 8 - 12 - 24

$\sqrt{34} \approx 5{,}8$ 0 à 0,1 près
$1 \times 34 = 34$
$2 \times 17 = 34$
3, 4, 5 ne divise pas 34
Les diviseurs de 34 sont donc : **1 – 2** – 17 – 34

Les diviseurs communs de 24 et 34 sont donc **<u>1 et 2</u>**

Deux nombres sont <u>premiers entre eux</u> si ils n'ont que 1 comme diviseur commun.

Les diviseurs de 20 sont **1** – 2 – 4 – 5 – 10 – 20.
Les diviseurs de 21 sont **1** – 3 – 7 – 21.
Leur seul diviseur commun est 1.
20 et 21 sont donc premier entre eux.

c) Plus Grand Commun Diviseur de deux entiers (PGCD)

Le PGCD de deux entiers est leur plus grand diviseur commun.
On le note PGCD(*a*,*b*)

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer le PGCD de deux nombres :

Méthode 1 : énumération de tous les diviseurs

Pour déterminer le PGCD de deux entiers *a* et *b*, on dresse la liste de leurs diviseurs. (voir II .a)

1326 a pour diviseur **1** – **2** – **3** – **6** – **13** – 17 – 26 – 34 – **39** – 51 – **<u>78</u>** – 102 – 221 – 442 – 663 – 1326
546 a pour diviseur **1** – **2** – **3** – **6** – 7 – **13** – 14 – 21 – 26 – **39** – 42 – **<u>78</u>** –91 – 182 – 273 – 546
Donc PGCD(1326 ; 546) = 78

Calcul réalisé en 200 secondes

Méthode 2 : soustractions successives.

Si *d* est un diviseur commun de *a* et *b*, alors *d* est aussi un diviseur de *a* + *b* et de *a* – *b*.

On peut déduire de ce qui précède que pour *a* > *b* on a : PGCD(*a*,*b*) = PGCD(*a*–*b*,*b*)

Cette dernière propriété permet de calculer le PGCD de deux nombres :

1326 – 546 = 780	donc	PGCD (1326 ; 546) = PGCD(780 ; 546) = P
780 – 546 = **234**	donc	P = PGCD(546 ; 234)
546 – 234 = 312	donc	P = PGCD(234 ; 312)
312 – 234 = 78	donc	P = PGCD(234; 78)
234 – 78 = 156	donc	P = PGCD(78 ; 156)
156 – 78 = 78	donc	P = PGCD(78 ; 78)

On a donc PGCD(1326 ; 546) = PGCD(78 ; 78) = 78

Calcul réalisé en 50 secondes

Méthode 3 : algorithme d’Euclide (accélération de la méthode 2)

En observant les calculs de la méthode précédente, on peut remplacer les deux premières étapes par une seule : **1326 –** 2×546 = **234**. 234 est en fait le reste de la division euclidienne de 1326 par 546.
La méthode s’appuie donc sur le fait qu’un diviseur commun à 1326 et 546 est aussi un diviseur commun à 546 et au reste (234) de la division euclidienne de 1326 par 546.

Si $a = bq + r$ alors PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r)

Un algorithme est suite d'opérations à effectuer

$1326 = 2 \times 546 + 234$ donc PGCD(1326 ;546) = PGCD(546 ;234)
$546 = 2 \times 234 + 78$. donc PGCD(546 ; 234) = PGCD(234 ; 78)
$234 = 3 \times 78 + 0$ donc PGCD(234 ; 78) = PGCD(78 ; 0)
On a donc PGCD(1326 ; 546) = PGCD(78 ; 0) = 78

Calcul réalisé en 30 secondes

Quelle méthode choisir ?

Pour calculer le PGCD de petits nombres, la première méthode est préférable. On peut d’ailleurs souvent effectuer la recherche mentalement.
Pour des nombres plus grands, en comparant la recherche du PGCD de 1326 et 546 faites ci-dessus, on se rend bien compte qu’il faut utiliser l’algorithme d’Euclide plutôt que la méthode par soustraction successive.

III Applications

1) Simplification de fractions

Une fraction est <u>irréductible</u> lorsque son dénominateur et son numérateur sont premier entre eux.

<u>Simplifier une fraction</u>, c’est la rendre irréductible.

Pour rendre une fraction irréductible, on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

Exemple : simplifier $\frac{2340}{1344}$ en une fraction irréductible.

Recherchons le PGCD de 2340 et 1344 en utilisant l’algorithme d’Euclide :

$2340 = 1344 \times 1 + 996$
$1344 = 996 \times 1 + 348$
$996 = 348 \times 2 + 300$
$348 = 300 \times 1 + 48$
$300 = 48 \times 6 + 12$
$48 = 12 \times 4 + 0$

12 est le dernier reste non nul donc : PGCD(1344,2340) = 12

$$\frac{2340}{1344} = \frac{12 \times 195}{12 \times 112} = \boxed{\frac{195}{112}}$$

2) Résolution de problème

Un marchand vient de recevoir 1240 bonbons et 320 chocolats.
Il souhaite faire le plus grand nombre de paquets identiques en utilisant tous les bonbons et chocolats.
Combien de paquets pourra t-il faire ?

Soit p le nombre de paquets qu'il pourra faire.
Le marchand utilise tous les bonbons, p divise donc 1240
Le marchand utilise tous les chocolats, p divise donc 320
p est donc un diviseur commun de 1240 et 320
On veut faire le plus grand nombre de paquet, p est donc le plus grand diviseur commun de 1240 et 320.
Donc p = PGCD (1240, 320)

Recherchons le PGCD (1240, 320) en utilisant l'algorithme d'Euclide :
$1240 = 320 \times 3 + 280$
$320 = 280 \times 1 + 40$
$280 = 40 \times 7 + 0$
40 est le dernier reste non nul donc PGCD (1240, 320) = 40

Le marchand pourra donc confectionner <u>40 paquets</u>.