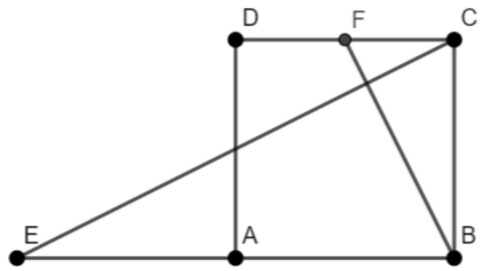
2021 2022 – Test Produit Scalaire – Première – Spécialité Mathématiques

- Calculer un produit scalaire en utilisant une projection orthogonale
- Calculer un produit scalaire à l'aide de la formule du cosinus
- Calculer un produit scalaire dans un repère orthonormé
- Utiliser les propriétés du produit scalaire
- Utiliser la formule d'Al-Kachi

<u>Exercice 1</u> (4,5 points)

On considère la figure ci-contre où :

- $ABCD$ est un carré de côté 6 cm
- F est le milieu de [DC]
- A est le milieu de [EB]



1) Calculez les produits scalaires suivants sans utiliser de repère :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FD}$; $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{DA}$

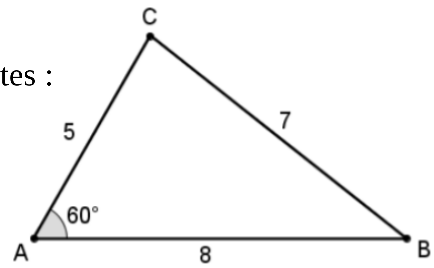
2) a) Démontrez, sans utiliser de repère que : $\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CB}\right)=0$

   b) Que peut-on en déduire ?

<u>Exercice 2</u> (2 points)

On donne la figure ci-contre. Les deux questions suivantes sont indépendantes :

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=$
2) Déterminer $\widehat{ABC}$ au degré près.



<u>Exercice 3</u> (2 points)

Dans un repère orthonormé, on donne $A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

1) Calculez le produit scalaire suivant : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2) Calculez la longueur AB ?

<u>Exercice 4</u> (1,5 points)

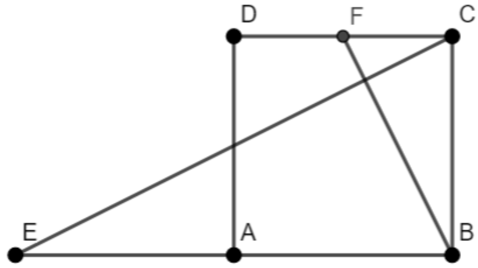
Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux et tels que $\|\vec{u}\|=a$ et $\|\vec{v}\|=2a$ avec a un réel positif non nul.

Exprimez en fonction de a les produits scalaires suivants :

$(\vec{v}+5\vec{u}).\vec{u}=$

$(\vec{v}+5\vec{u})(\vec{v}-3\vec{u})=$

Evaluation formative 2021 2022 – Première – Spécialité Mathématiques – Correction



<u>Exercice 1</u> (4,5 points)

- $ABCD$ est un carré de côté 6 cm

- F est le milieu de [DC] et A est le milieu de [EB]

3) Calculez les produits scalaires suivants sans utiliser de repère :

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont colinéaires donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FD} = -AB \times FD = -6 \times 3 = \boxed{-18}$

En projetant orthogonalement $\overrightarrow{CE}$ sur $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA} = BE \times BA = 12 \times 6 = \boxed{72}$

Comme (DF) et (BC) sont perpendiculaires : $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BC} = \boxed{0}$

En projetant orthogonalement $\overrightarrow{FA}$ sur $\overrightarrow{DA}$: $\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DA} = DA^2 = \boxed{36}$

4) a) Démontrez, sans utiliser de repère que : $(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CB}) = 0$

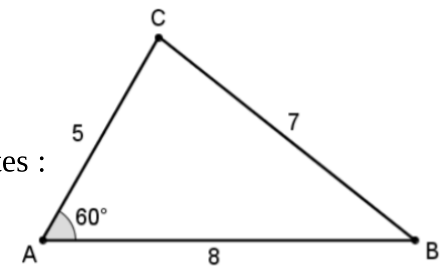
$$(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CB}$$

$$= EB \times FC + 0 + 0 - BC \times CB = 12 \times 3 - 6 \times 6 = 36 - 36 = \boxed{0}$$

b) Que peut-on en déduire ?

D'après la question précédente, en utilisant la relation de Chasles : $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{FB} = 0$

Donc <u>les droites (EC) et (FB) sont perpendiculaires</u>.



<u>Exercice 2</u> (2 points)

On donne la figure ci-contre. Les deux questions suivantes sont indépendantes :

3) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} =$

<u>Méthode 1</u> :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB^2 + AB \times AC \times \cos(60)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -8^2 + 8 \times 5 \times \cos(60) = -64 + 40 \times 0{,}5 = -64 + 20 = \boxed{-44}$

<u>Méthode 2</u> :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - AC^2) = -\frac{1}{2}(8^2 + 7^2 - 5^2) = -\frac{1}{2}(64 + 49 - 25) = \boxed{-44}$$

4) Déterminer $\widehat{ABC}$ au degré près.

On utilise la formule d'Al-Kachi :

$CA^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC \times \cos\widehat{ABC}$

$5^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \times 8 \times 7 \times \cos\widehat{ABC}$

$25 = 64 + 49 - 112 \times \cos\widehat{ABC}$

$25 = 113 - 112 \times \cos\widehat{ABC}$

$-88 = -112 \times \cos\widehat{ABC}$

$\cos\widehat{ABC} = \dfrac{88}{112}$

$\widehat{ABC} = cos^{-1}\left(\dfrac{88}{112}\right) \approx \boxed{38 \text{ degrés à 1 près}}$

Exercice 3 (2 points)

Dans un repère orthonormé, on donne $A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

3) Calculez le produit scalaire suivant : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2+2\\7-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1+2\\5-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 4\times 1 + 4\times 2 = 4 + 8 = \boxed{12}$$

4) Calculez la longueur AB ?

$$AB = \sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}{}^2 + y_{\overrightarrow{AB}}{}^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \boxed{\sqrt{32}}$$

Exercice 4 (1,5 points)

Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux et tels que $\|\vec{u}\| = a$ et $\|\vec{v}\| = 2a$ avec a un réel positif non nul.

Exprimez en fonction de a les produits scalaires suivants :

$$(\vec{v} + 5\vec{u}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} + 5\vec{u}.\vec{u} = 0 + 5\|\vec{u}\|^2 = \boxed{5a^2}$$

$$(\vec{v} + 5\vec{u})(\vec{v} - 3\vec{u}) = \vec{v}.\vec{v} - 3\vec{u}.\vec{v} + 5\vec{u}.\vec{v} - 15\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{v}\|^2 - 0 + 0 - 15\|\vec{u}\|^2 = 4a^2 - 15a^2 = \boxed{-11a^2}$$